– DOKTORA YETERLİLİK NOTLARI –

MEKANİK

- KATI CİSİMLER MEKANİĞİ
  - RİJİT CİSİMLER
    - STATİK
    - DİNAMİK
  - ŞEKİL DEĞİŞTİREBİLEN CİSİMLER
    - (MUKAVEMET)
- AKIŞKANLAR MEKANİĞİ
  - SIKIŞTIRILABİLİR AK.
  - SIKIŞTIRILAMAZ AK.

Mekanik: Kuvvetlerin ve sıcaklık değişimlerinin cisimler üzerindeki etkileri (durgun ve hareketli) ile ilgilenen bir fizik bilimidir.

Mukavemet: Şekil değiştirebilen cisimlerin mekaniğidir. Cisimlerin şekil değiştirmesini ve dayanımını inceler. Mukavemette temel amaç tasarım – dizayn yani boyutlandırmadır.

Statik: Kuvvetlerin etkisi altındaki cisimlerin dengesi ile ilgilenir.

Dinamik: Kuvvetlerin etkisi altındaki cisimlerin hareketi ile ilgilenir.

Uzay: Bir koordinat sistemine göre cisimler ile dolu geometrik bölgedir.

Zaman: Olayların art arda oluşumunun bir ölçüsüdür.

Rijit cisim: Şekil değişimine uğramayan cisim.

VEKTÖREL BÜYÜKLÜKLER

- Yer Değiştirme
- Hız
- İvme
- Kuvvet
- Moment
- Momentum

SKALER BÜYÜKLÜKLER

- Zaman
- Hacim
- Yoğunluk
- Hız
- Enerji
- Kütle

NOT: Gerilme tansörel bir büyüklüktür. (2. dereceden)

Tasarım Şartları

- Güvenli.
- Ekonomik.
- Estetik.

Katılaşma ilkesi: Kuvvet dengesi cismin aldığı son şekle göre yapılır.
Birinci mertebe teorisi: Katılaşma ilkesinin aksine cismin ilk anına kuvvet dengesi yazılır. Şekil değişimi ve ilk an arasındaki değişim çok küçüktür.

Süperpozisyon ilkesi: Sistemin ayrı ayrı ele alınarak sonuçların sonradan birleştirilmesidir. Sistemdeki yer değiştirmeler çok küçük olmalı. Cisim hooke kanununa göre şekil değiştirmelidir.

Saint Venant ilkesi: Eş değerlilik ilkesidir. Statikçe eş değer olan sistemler mukavemetçe eş değer olmayabilir. Ayrıca; yükleme altındaki bir elemanda yüklerin uygulandığı yerden cismin genişliği kadar bir mesafeden veya genişlikten daha uzun bir mesafede gerilme dağılımı neredeyse eşittir.

Konum ve Birim Vektör

- $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ • $|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

  ▫ $F_x = F.\cos\theta_x$ ▫ $F_y = F.\cos\theta_y$ ▫ $F_z = F.\cos\theta_z$

• $l = \cos\theta_x$
• $m = \cos\theta_y$ • $l^2 + m^2 + n^2 = 1$
• $n = \cos\theta_z$

Doğrultman Kosinüsleri

- $A(1,2,3)$
  $B(4,5,6)$

• $\vec{r}_{AB} = (4-1)\vec{i} + (5-2)\vec{j} + (6-3)\vec{k} \longrightarrow$ Konum Vektörü

• $\vec{\lambda}_{AB} = \dfrac{\vec{r}_{AB}}{|r_{AB}|} \longrightarrow$ Birim Vektörü

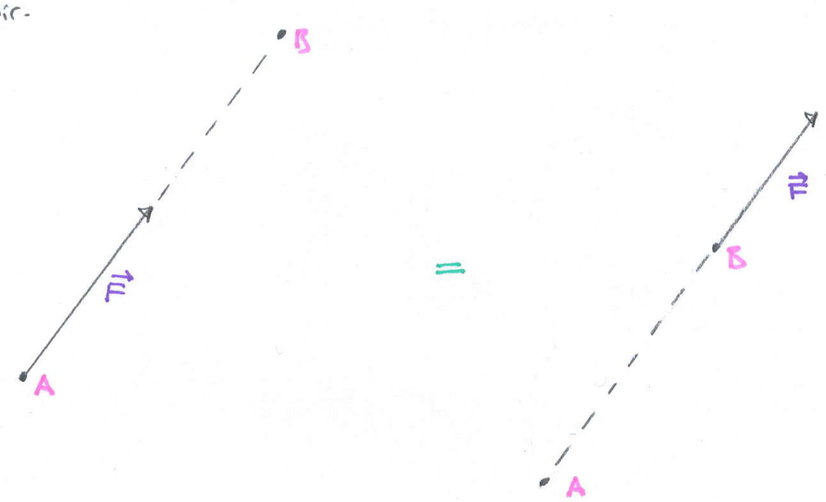
• $\vec{F}_{AB} = F.\vec{\lambda}_{AB}$

MEKANİK'İN 6 TEMEL-ESAS İLKESİ

1.) Kuvvetleri bileşenlerine ayırabilme özelliği. Buna paralelkenar kanunu denir.

2.) Kaydırma ilkesidir. Bir vektör aynı doğrultuda diğer noktalarda da etki etmektedir.

→



3.) Newton'un I. hareket yasası olan eylemsizliktir. Bir cisim dursun ve hareketli olabilir. Cismin sahip olduğu bu haline doğal hali denir ve cisim bu doğal halini her zaman korumak ister. Buna eylemsizlik denir.

4.) Newton'un II. hareket yasası olan kuvvet . ivme eşitliğidir.

→ • $\vec{F} = m.\vec{a}$ • $\vec{W} = m.\vec{g}$

5.) Newton'un III. hareket yasası olan etkiye-tepki yasasıdır.

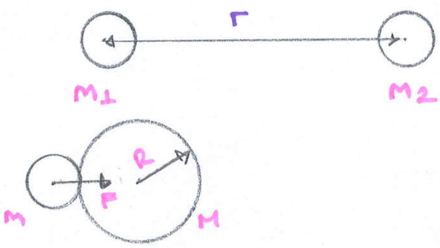
→ • $F = F'$

6.) Newton'un çekim yasasıdır. Kütlesi olan her cisim birbirini çeker.

→ • $F = G.\dfrac{M_1.M_2}{r^2}$

• $G = 6,673.10^{-11}\ \dfrac{m^3 kg}{s^2}$

(Evrensel Çekim Sabiti)

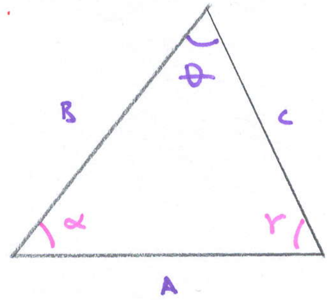


- Dünya için;

$$g = G.\frac{M}{R^2} = 9,81\ m/s^2 \rightarrow F = \cancel{m}g = G\frac{\cancel{m}M}{R^2} = 66,73.10^{-12}\frac{5,97.10^{24}}{(6,371.10^{6})^2} \Rightarrow g = 9,81\ m/s^2$$

- Hesaplamalarda kütle çekim kuvvetinin etkisi ihmal edilir. (ANSYS'de bile yok)
- Fakat yer çekiminin etkisi ihmal edilmez.
- Statik'te tüm Newton yasaları kullanılır. Fakat bir kez daha kütle çekim etkisi ihmal edilir.
- Yer çekimi hareketten bağımsız etki eder.

Cos - Sin Teoremi



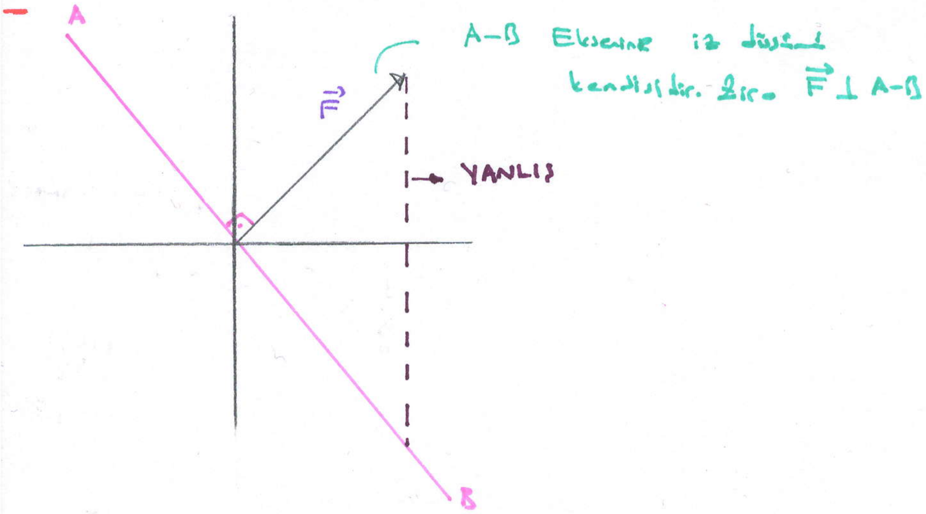
- $A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos\theta$

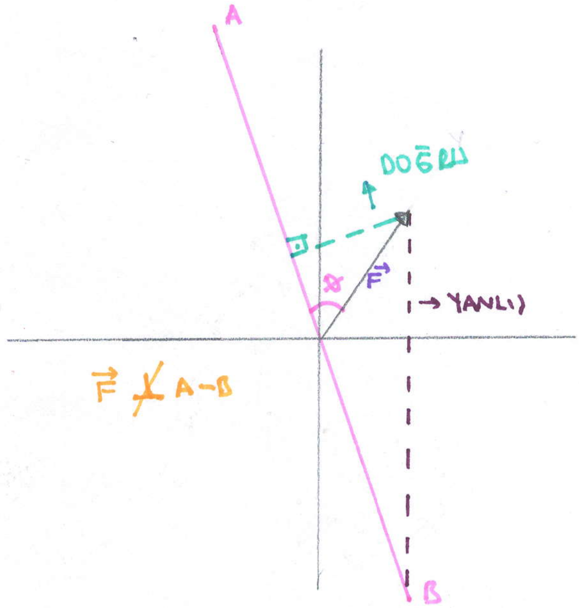
- $\dfrac{A}{\sin\theta} = \dfrac{B}{\sin\gamma} = \dfrac{C}{\sin\alpha}$

- Küçük açılarda;

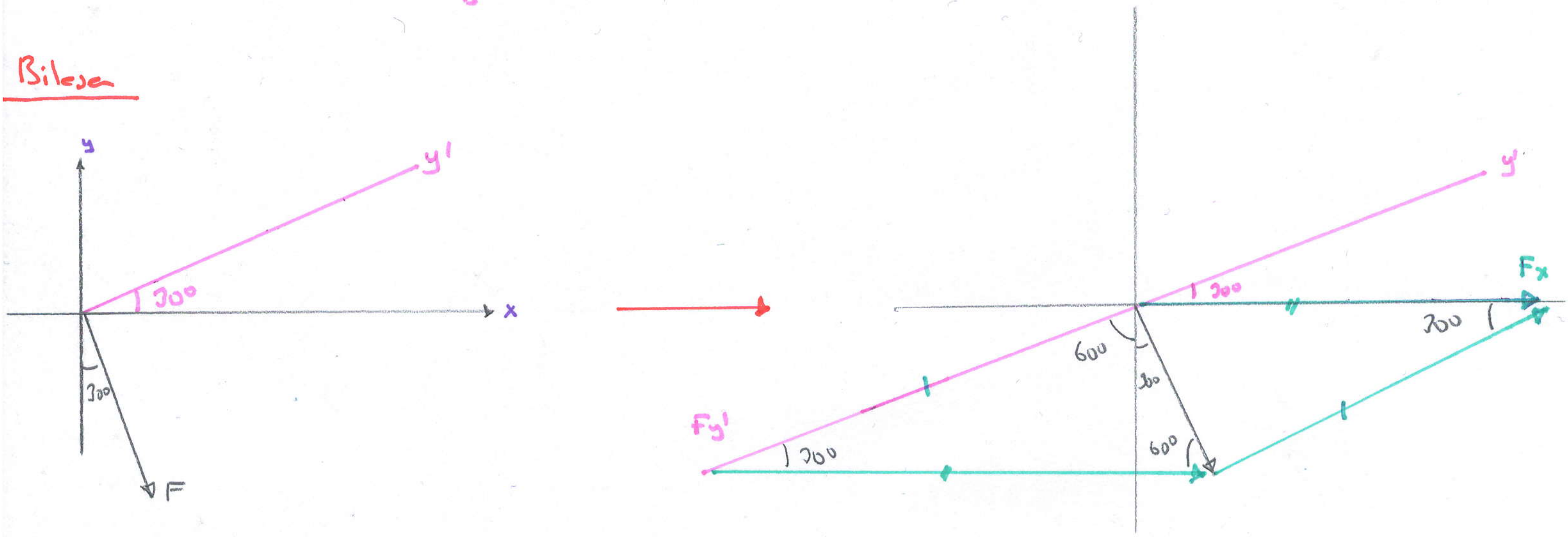
 . $\sin\alpha = \tan\alpha = \alpha$. $\cos\alpha = 1$

İz Düşümü





Bileşen



$$\frac{F}{\sin 30} = \frac{F_x}{\sin 90} = \frac{F_y'}{\sin 60}$$

VARİGNON TEOREMİ

- Bir kuvvetin herhangi bir noktaya göre momenti ile o kuvvetin bileşenlerinin o noktaya göre momentleri eşittir.

NOT: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\vec{r}$ ↓ Konum Vektörü (Birim değil)

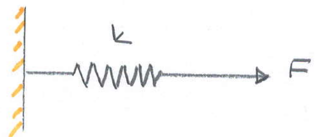
DENGE ŞARTI

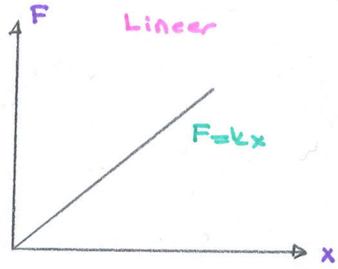
- • $\Sigma F = 0$ • $\Sigma M = 0$

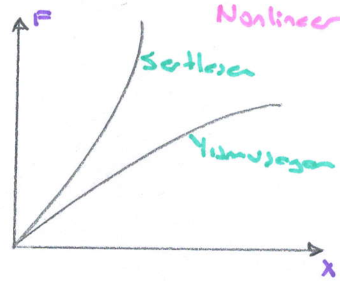
yani;

• $\Sigma F_x = 0$ • $\Sigma F_y = 0$ • $\Sigma F_z = 0$ • $\Sigma M_x = 0$ • $\Sigma M_y = 0$ • $\Sigma M_z = 0$

NOT:







KAFES – ÇERÇEVE

- Kafes; rijit bir yapı elde etmek üzere uçlarından birbirine bağlı elemanlarda oluşan iskeletler kafes olarak adlanır.

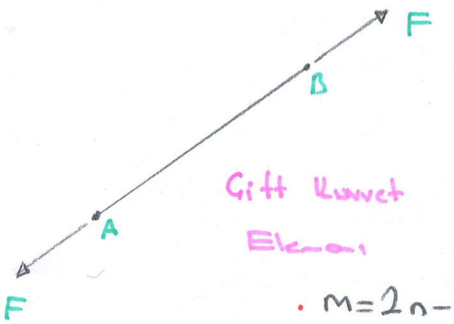
• $M = 2n - 3$ ... Kararlı
• $M < 2n - 3$ ... Belirsiz
• $M > 2n - 3$ ... Kararsız

- • $M = 2n - 3$

M: Çubuk sayısı
n: Mafsal sayısı

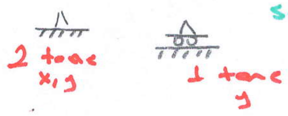
- Çerçeve; bir yapının bireysel elemanlarından en az biri çok kuvvet elemanı olması halinde çerçeve veya makine elemanı olarak adlandırılır.

-



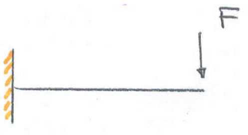
• $M = 2n - r$

↳ Mesnet kısıtlayıcı sayısı

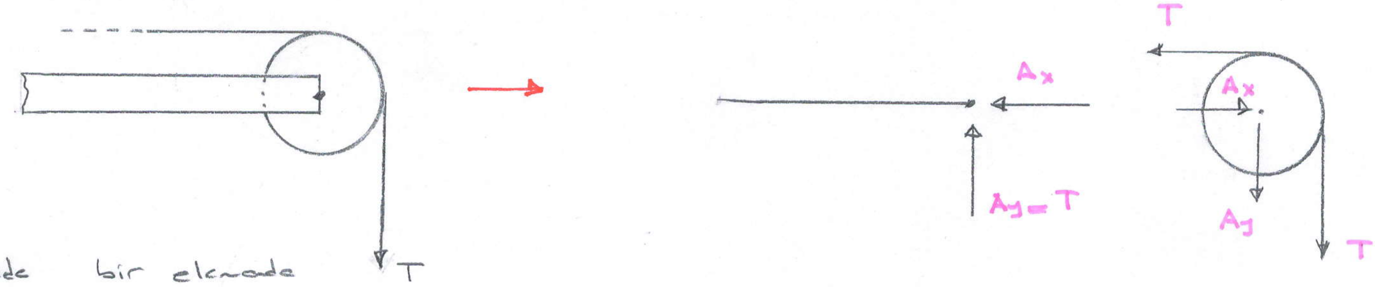


- Kafesler çift kuvvet elemanlarından oluşurlar.
- Bunlara çubuk (bar) denir ve moment taşımazlar.
- Çerçeveler ise çok kuvvet elemanına sahiptirler.
- Bunlara kiriş (beam) denir ve moment taşırlar.
- Kafeslerde kuvvetler elemanlara değil mafsallara uygulanır.
- Çerçeveler yük taşır, makineler ise yük iletir veya dönüştürür.

-



-



- Çerçevede bir elemanda hesaplanamayan kuvvetler bağlı olduğu diğer elemandan hesaplanabilir.
- Kafeslerde düğüm metodu kullanılırken en az eleman bağlı olan ile başlanmalı.

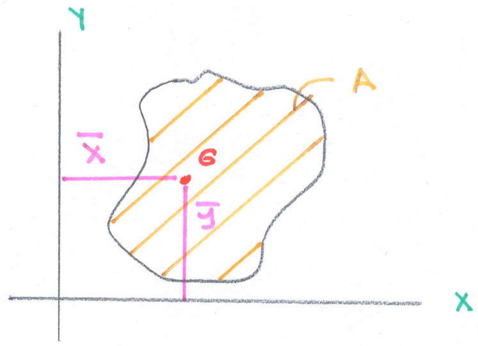
AĞIRLIK MERKEZİ – KÜTLE MERKEZİ

- Bir cismin her maddesel noktasına etkiyen yer çekim kuvvetinin bileşkesi ağırlıktır ve G ağırlık merkezinden etki eder.
- Her bir maddesel noktanın bir yere göre momenti, tek başına ağırlığın o yere göre momenti eşittir. Burada kullanılan mesafe bize ağırlığın G'den etki ettiğini gösterir.
- Yer çekimi yok ise G'de yoktur.
- Dünya merkezine yaklaştıkça ve merkezinden uzaklaştıkça g yer çekim ivmesi değişeceği için G'de de değişimler olacaktır ama bu ihmal edilir. Zira değişim çok küçüktür. (Buradaki G ağırlık merkezinin yeridir.)

→ ∘ $g = G \dfrac{M}{R}$ → Dünya merkezine yakınlık ile g'nin değişimi bu formül ile benimsenebilir.

- G ağırlık merkezinin yerini bulmak için momentler ilkesi kullanılır. Buradaki momentler ilkesi bir nevi Varignon Teoremine benzer.
- Ağırlık merkezi ve kütle merkezi çakışıktır.
- Simetri parçalarda momentlerin birbirini iptal etmesi ile G ortadadır.

→



• $A \cdot \bar{y} = \int y \cdot dA$

↳ Alanın kendisinin x eksenine göre momenti her bir sonsuz küçük parçasının x eksenine göre momentlerinin toplamına eşittir (momentler ilkesi). Burada $\int y\,dA$ birincil moment veya statik momenttir.

Buradan yola çıkarak;

→ • $\bar{x} = \dfrac{\Sigma A_i \cdot x_i}{\Sigma A_i}$ • $\bar{y} = \dfrac{\Sigma A_i \cdot y_i}{\Sigma A_i}$ (Düzgün geometriler için)

□ $\Sigma A_i x_i = Q_y$ (y eksenine göre statik moment)

□ $\Sigma A_i y_i = Q_x$ (x eksenine göre statik moment)

Ayrıca;

- $\bar{x} L = \int x \, dL$ • $\bar{y} \cdot L = \int y \, dL$ ---- ÇİZGİ
- $\bar{x} A = \int x \, dA$ • $\bar{y} \cdot A = \int y \, dA$ ..... ALAN
- $\bar{x} V = \int x \, dV$ • $\bar{y} \cdot V = \int y \, dV$ ..... HACİM

$\bar{x} = \dfrac{\Sigma L_i x_i}{\Sigma L_i}$ gibi yazılabilir.

- Birim ağırlık veya özgül ağırlık cismin birim hacmine etkiyen ağırlıktır.

→ • $\gamma = \frac{W}{V}$ (N/m^3) • $W = \gamma \cdot (A \cdot t)$ • $\gamma = \rho \cdot g$

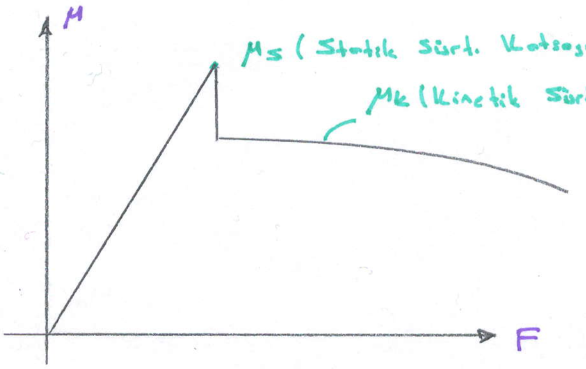
SÜRTÜNME KUVVETİ

- Üç çeşit sürtünme vardır;

△ Kuru (Coulomb) Sürtünmesi: Yağlanmamış iki katı arasında.

△ Akışkan Sürtünmesi: Sıvı – Sıvı / Gaz – Gaz

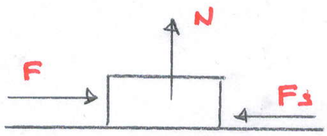
△ İç sürtünme: Sürekli tekrarlı yüklere maruz kalan tüm katı malzemelerde dir.

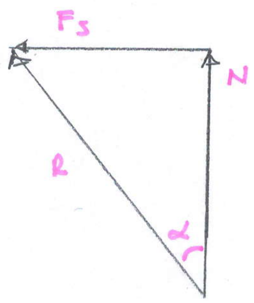
- 

• $F_{max} = N \cdot \mu_s$ • $F_k = N \cdot \mu_k$

• $F < \mu_s \cdot N$ • $V \uparrow \ \mu_k \downarrow$

- Sürtünme açısı;



→ 

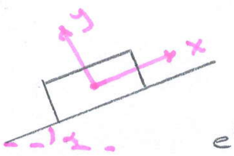
→ • $\tan\alpha = \frac{F_s}{N}$

• at $F_s = F_{max} \Rightarrow \alpha = \phi_s$

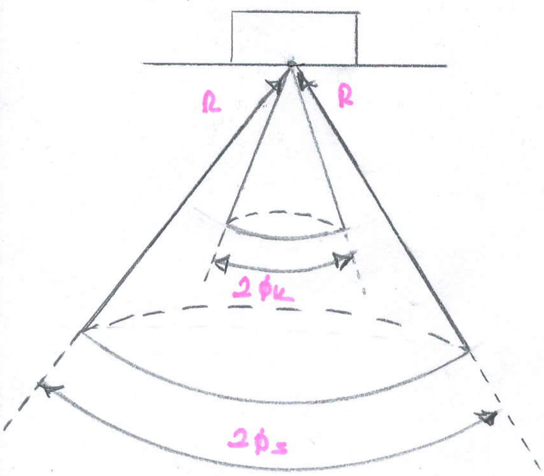
• at $F_s = F_k \Rightarrow \alpha = \phi_k$

• $\tan\phi_s = \mu_s$

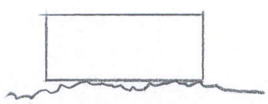
• $\tan\phi_k = \mu_k$

- 

eksen takımı böyle yapılırsa daha iyi.



- Sürtünme kuvveti yüzey alandan bağımsızdır. Zira temas pürüzlü yüzeylerdeki mikro girintiler ile olmaktadır.

→ 

- Ama burada yüzeye yakınlık veya yağ, kir ve pas gibi sürtünme kuvvetini etkiler.

- Sürtünme katsayısı izafi bir değerdir. Yüzey ve cisme göre değişir. Bu da zaten F_s'nin yüzey alanı ile olan ilişkisini kapsamaktadır.

DENGE İÇİN;

→ • $|F_s| \geq |F_x|$

$|F_x| = \Sigma F_x$. Buradaki ΣF_x içinde F_s yoktur. Eğer olursa o zaman

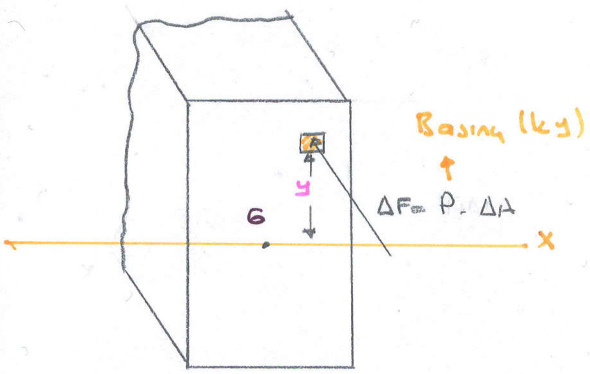
• $|F_x| = 0$ olmalı.

ATALET MOMENTLERİ

- Atalet momentlerini genel olarak iki tipe ayırabiliriz;
  - Şekil değişimine karşı direnç;
    - Alan atalet momenti → Eğilmeye karşı gösterilen direnç.
    - Polar atalet momenti → Burulmaya karşı gösterilen direnç.
  - Harekete karşı direnç;
    - Kütle atalet momenti

- Atalet direnç – eylemsizlik demektir.
- Şekil değişimine karşı gösterilen dirençlerde bir de çarpım atalet momenti vardır ve özellikle eğik eğilmede asal atalet momentlerini bulurken kullanılır.

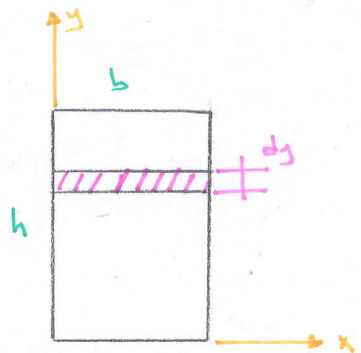
Alan Atalet Momenti



$$R = \int p \, \Delta A = \underbrace{k \int y \, \Delta A}_{\text{Statik Moment}}$$

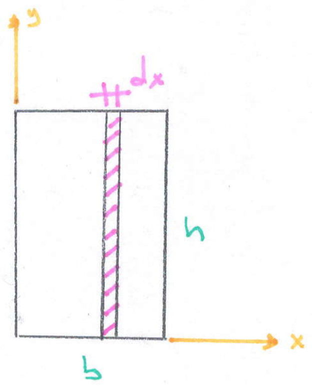
$$M_x = R.y = \underbrace{k \int y^2 \, \Delta A}_{I_x \text{ (Alan Atalet Momenti)}}$$

- $I_x = \int y^2 \, dA$
- $I_y = \int x^2 \, dA$



$$I_x = \int_0^h y^2 \, dA = \int_0^h y^2 . (b.dy) = \frac{by^3}{3} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

(x ekseni tabanda)

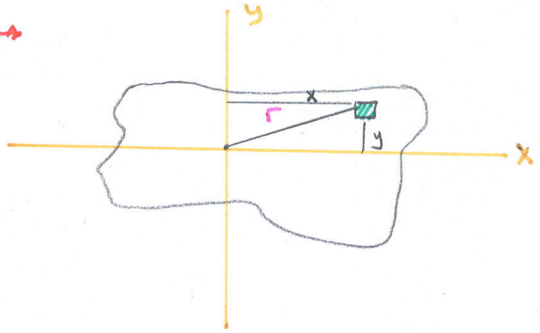


$$I_y = \int_0^b x^2 \, dA = \int_0^b x^2 \, (h.dx) = \frac{hx^3}{3} \Big|_0^b = \frac{hb^3}{3}$$

(y ekseni en solda)

Polar (Kutupsal) Atalet Momenti

- Polar yani kutupsal atalet momenti orjine göredir.



$$J = \int r^2 dA$$

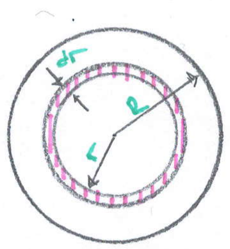
$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow J=\int (x^2+y^2)dA = \underbrace{\int x^2 dA}_{I_y} + \underbrace{\int y^2 dA}_{I_x}$$

$$\Rightarrow J = I_x + I_y$$

- Kare-dikdörtgen için polar atalet momenti;

· $\underbrace{J = \bar{I}_x + \bar{I}_y}_{\text{Tarafsız eksene göre}} = \dfrac{bh^3}{12} + \dfrac{hb^3}{12}$ → Orjin tarafsız eksen üzerinde

-



$$\left.\begin{aligned} J &= \int r^2 dA \\ dA &= (2\pi r).dr \end{aligned}\right\} \Rightarrow J = \int_0^R r^2\, 2\pi r\, dr = \frac{2\pi r^4}{4}\Bigg|_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$I_x = I_y \quad \text{ve} \quad J = I_x + I_y = 2I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{J}{2} = \frac{\pi D^4}{64}$$

Paralel Eksen Teoremi

-

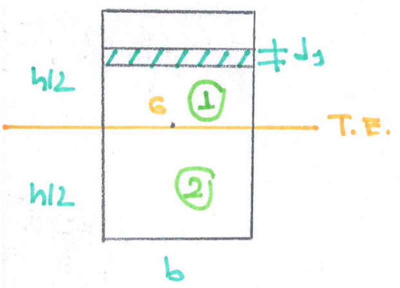
· $I = \bar{I} + A.d_y^2$ · $I = \Sigma \bar{I}_i + A_i d_{y_i}^2$

$\bar{I}$: T.E.'ne göre
$\bar{J}$: T.E.'ne göre

· $J = \bar{J} + A.d^2$

- Paralel eksen teoreminde tarafsız eksen baz alınır.
- İstenilen eksene göre I veya J hesaplanırken $\bar{I}$ ve $\bar{J}$ yani tarafsız eksene göre atalet momentleri kullanılır.

-



$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$$

$$\bar{I}_1 = \int_0^{h/2} y^2 dA = \int_0^{h/2} y^2 .\, b\, dy = \frac{bh^3}{24} \quad , \quad \bar{I}_1 = \bar{I}_2$$

$$\Rightarrow \bar{I} = 2.\bar{I}_1 = \frac{bh^3}{12}$$

Veya

I_{taban} alınırsa $= \dfrac{bh^3}{3}$

$$I = \Sigma \bar{I} + A d_y^2 \Rightarrow (\bar{I} = I + A d_y^2)$$

$$\Rightarrow \bar{I} = \frac{bh^3}{3} + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{4bh^3 - 3bh^3}{12} = \frac{bh^3}{12}$$

Çarpım Atalet Momenti

- Bir A alanının her bir dA elemanının x ve y koordinatları ile çarpıp tüm alan üzerine integre edilerek bulunan değer.
- Kısaca alanın x ve y eksenlerine göre atalet çarpımıdır.
- • $I_{xy} = \int xy \, dA$ (+) (−) (0) olabilir

• $I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x}\bar{y} A$

↳ Cisim $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ eksenlerine göre simetri ise $\bar{I}_{xy} = 0$ olur.

Atalet Yarıçapı

• $I_x = y^2 A \Rightarrow y = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$

• $I_y = x^2 A \Rightarrow x = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$

• $J = r^2 A \Rightarrow r = \sqrt{\frac{J}{A}}$

Asal Atalet Momentleri

- θ kadar döndürülen bir eksen takımının atalet momentleri ve malzemenin max-min atalet momentleri için;

→ • $I_x + I_y = I_{x'} + I_{y'}$

• $I_{max-min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$

• $\tan 2\theta = -\frac{2 I_{xy}}{I_x - I_y}$

- Burkulmada simetrik olmayan ve eğik eğilmeye maruz kalacak çubuklarda hesaplama yapılırken asal atalet momentleri bulunup I_{min} ile işlem yapılır.

Virtüel İş

↱ (Skaler Çarpım)

- • $dU = \vec{F} \, d\vec{r}$ • $dU = M . d\theta$ (Normal Çarpım)
- Statik denge durumunda herhangi bir hareket olmayacağı için iş de yapılmayacaktır. Dolayısıyla;

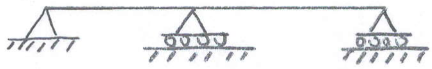
→ • $\sum [(\vec{F} . d\vec{r}) + (M . d\theta)] = 0$ olmalı.

Kiriş Tipleri

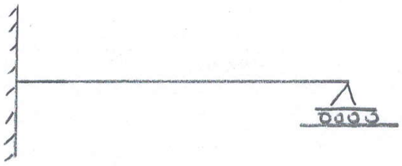
Basit Kiriş

Çıkmalı Kiriş

Konsol Kiriş

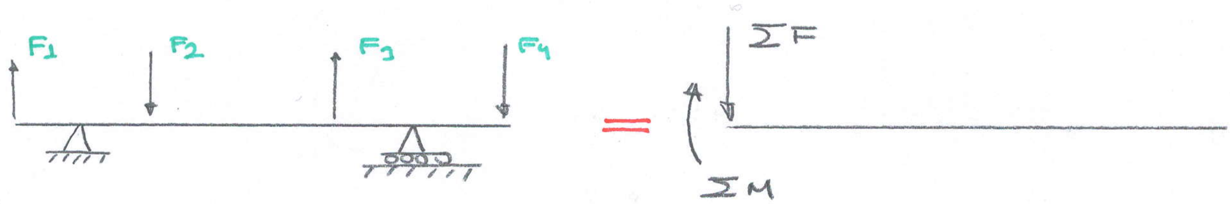


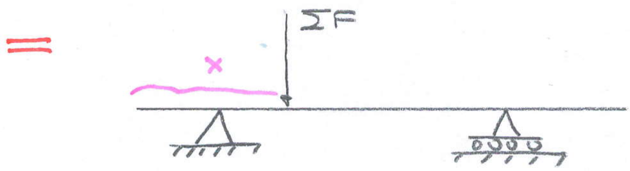
Sürekli Kiriş



Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Kayar Mafsallı Kiriş

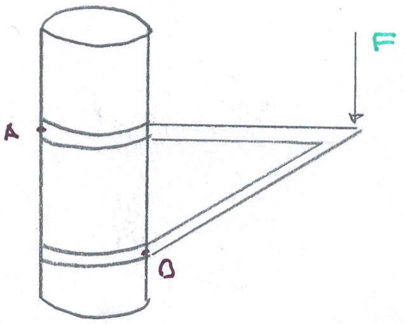
Ankastre Kiriş

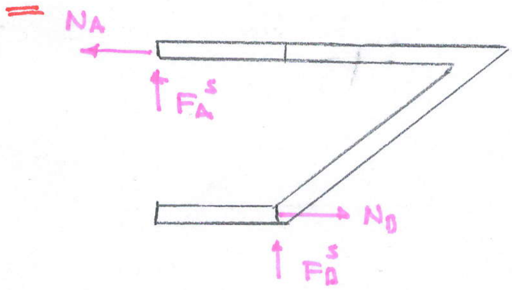




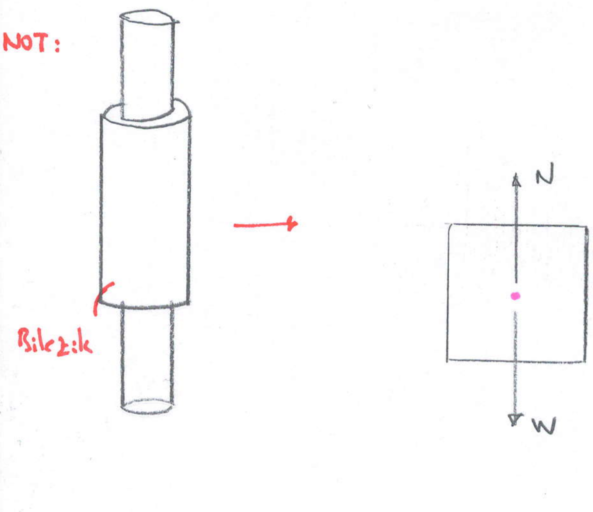
• $\Sigma M = x \cdot \Sigma F$

NOT:

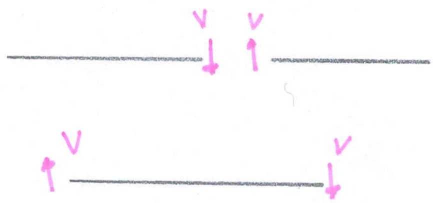




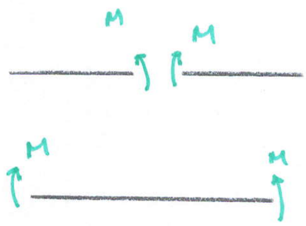
NOT:



NOT:



Pozitif Kesme kuvveti

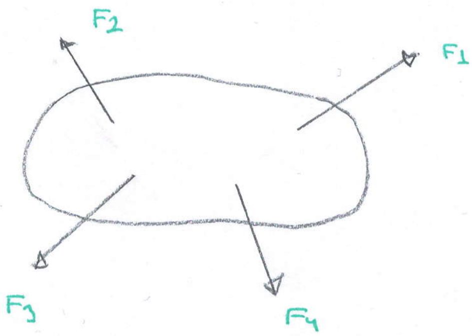


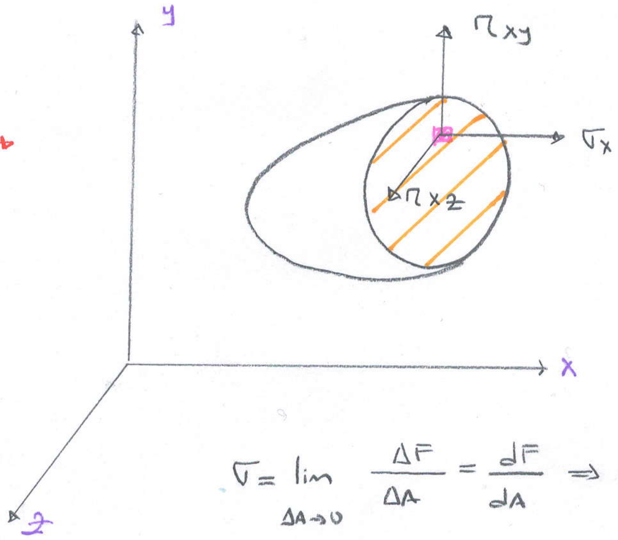
Pozitif Moment

Gerilme: Birim alana etkiyen iç kuvvet veya kesit üzerine etkiyen yayılı kuvvetlerin yoğunluğudur. Ayrıca birim hacim tarafından absorbe edilen enerji miktarı yani enerji yoğunluğu değeri olarak da düşünülebilir.

- Normal Gerilme
- Kayma Gerilmesi

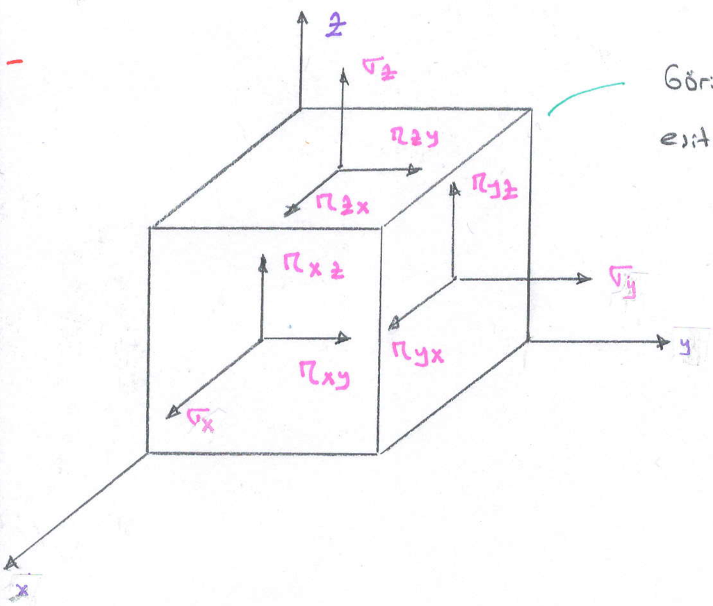
- Gerilme bir vektör değil 2. dereceden bir tensördür.
- Dış kuvvetlerin etkisindeki bir cisim ele alınırsa;



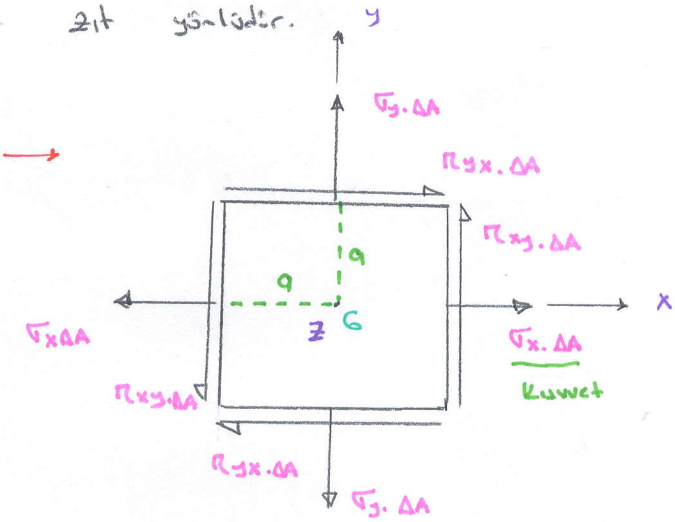


$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \Rightarrow \sigma_{ort} = \frac{F}{A}$$

- τ_{xy}
  - y → Gerilmenin doğrultusu
  - x → Ele alınan yüzeyin normali.



Görünmeyen yüzeylerde de gerilmeler eşit ve zıt yönlüdür.



$\Sigma F_x = 0$ $\quad \Sigma M_x = 0$ $\quad \Rightarrow \Sigma M_z = 0$

$\Sigma F_y = 0$ $\quad \Sigma M_y = 0$ $\quad \Rightarrow [\tau_{xy} \cdot \Delta A] \cdot a - [\tau_{yx} \cdot \Delta A] \cdot a = 0$

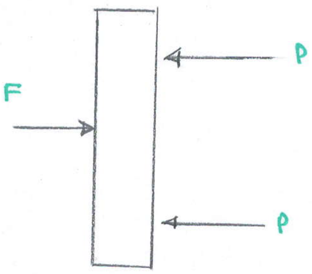
$\Sigma F_z = 0$ $\quad \Sigma M_z = 0$ $\quad \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$

Birbirine dik olan yüzeylerdeki kayma gerilmeleri birbirine eşittir.

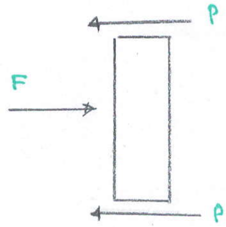
– Birbirine dik olan yüzeylerdeki kayma gerilmeleri eşit olduğu için bir cisimde en genel durumda 6 adet gerilme vardır.

– Bunlar; σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}.

–



⇒ $F = 2P$

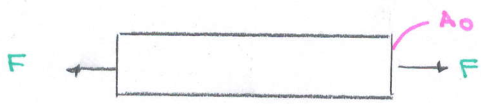


⇒ $\tau = \dfrac{P}{A} = \dfrac{F/2}{A} = \dfrac{F}{2A}$

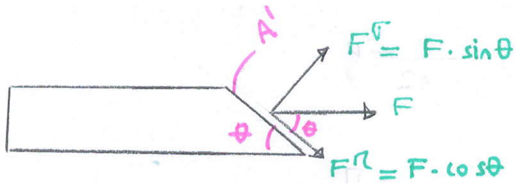
– Gerilme sorularında σ_{max} deliğin-pim yatağının olduğu çubuklarda olur.

– Yüzeye eğik etkiyen kuvvetler hem normal, hem de kayma gerilmeleri oluştururlar.

–



→



$A' > A_0$ yani A_0 ilk alan eğimli yüzeyin bileşenidir.

⇒ $\cdot\ \sigma = \dfrac{F^{\sigma}}{A'} = \dfrac{F \cdot \sin\theta}{\dfrac{A_0}{\sin\theta}} = \dfrac{F}{A_0} \cdot \sin^2\theta$ ⇒ $A_0 = A' \cdot \sin\theta$ ⇒ $A' = \dfrac{A_0}{\sin\theta}$

$\cdot\ \tau = \dfrac{F^{\tau}}{A'} = \dfrac{F \cdot \cos\theta}{\dfrac{A_0}{\sin\theta}} = \dfrac{F}{A_0} \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta$ → Burada dikkate alınan açı önemlidir.

– $\theta = 45^\circ$ olursa;

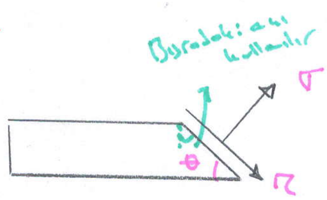
→ $\cdot\ \sigma = \dfrac{F}{A_0} \sin^2 45 = \dfrac{F}{A_0} \cdot 0{,}5 = \dfrac{F}{2A_0}$

$\cdot\ \tau = \dfrac{F}{A_0} \cos 45 \cdot \sin 45 = \dfrac{F}{A_0} \cdot 0{,}5 = \dfrac{F}{2A_0}$

→ Açı nereden alınırsa alınsın $\theta = 45^\circ$ için $\sigma = \tau = \dfrac{F}{2A_0}$ olur.

– Gerilmeler ise şekil üzerinde;

→



– Ayrıca θ kadar döndürülmüş bu yüzey için σ ve τ gerilmeleri ileri konularda ele alınan gerilme dönüşümleri ile de bulunabilir;

→ $\sigma' = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta$

- $\sigma_x = \dfrac{F}{A_0}$
- $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$
- θ: Gösterilen θ için $90 - \theta$

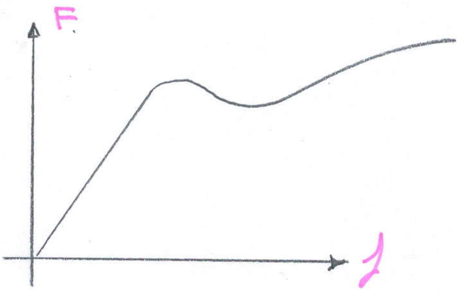
Emniyet Katsayısı

- $$s = \frac{F_{kopma}}{F_{emniyet}} \quad \text{veya} \quad s = \frac{\sigma_{kopma}}{\sigma_{emniyet}} \Rightarrow \sigma_{em} = \frac{\sigma_{kop}}{s}$$

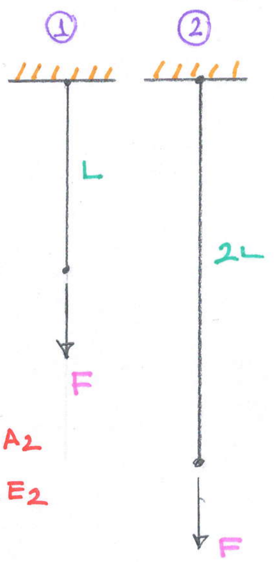
- Emniyet katsayısının çok küçük seçilmesi risklidir.
- Emniyet katsayısının çok büyük seçilmesi de maliyetli ve işlevsiz bir sistem analizi oluşturur.
- Emniyet katsayısının seçilme sebebi;
  - Malzeme özelliklerinde olabilecek değişim,
  - Yorulma etkisi,
  - Oluşabilecek farklı yüklemeler,
  - Gevreklik - süneklik,
  - Teorik hesaptaki belirsizlik,
  - Yetersiz bakım veya doğal olaylar.
- Burkulma durumu için önerilen emniyet katsayısı; $s \geq 5$' dir.

Çekme Eğrisi

-



Yük - Def. Eğrisi



$A_1 = A_2$

$E_1 = E_2$

↳ İlerleyen sayfalarda açıklaması var.

$$\delta_1 = \frac{F.L}{A\ E}$$

$$\delta_2 = \frac{F.2L}{A\ E}$$

① uzama: δ

② uzama: 2δ

- İki eşit çubuk fakat biri diğerinin iki katı uzunlukta ele alındığında; 2L boyundaki çubuk 2δ kadar uzadı.
- Fakat burada δ/L oranına bakılırsa iki çubuk içinde;

→ $$\underbrace{\frac{\delta}{L}}_{1} = \underbrace{\frac{\cancel{2}\delta}{\cancel{2}L}}_{2} \Rightarrow$$ 1. ve 2. çubuk için δ/L oranı eşittir.

- Dolayısıyla buradaki oran dikkate alınmalıdır ve bu kavram bizi birim şekil değişimini tanımlamaya götürür.

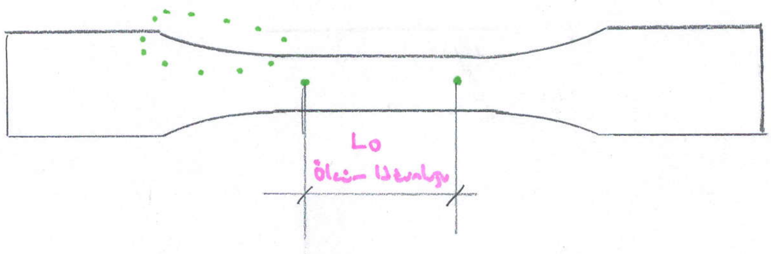
- Birim şekil değişimi;

→ $$\varepsilon = \frac{l}{L_o} = \frac{L_f - L_o}{L_o}$$ (Birim yok) $\quad l = \Delta L$

$$\varepsilon = \int \frac{dl}{dx}$$

- Çekme eğrisi için ele alınan bir numune şekli şöyle olmalıdır;

→



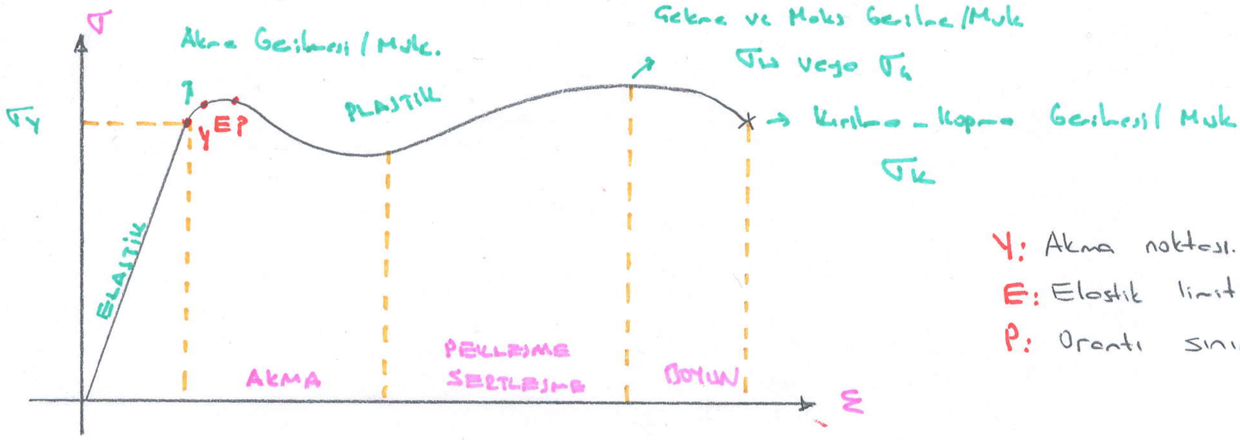
- Bu şekil sünek malzemeler için önerilir.

- Yeşil noktalar ile gösterilen radius verilmiş kısımlar sayesinde gerilme yığılmaları ve dislokasyonlar engellenir.
- Burada numuneye bilerek bir hata verilir. Zira numune çekme cihazına çenelerden bağlanmaktadır.
- İlgili bu çeneler numuneye baskı yapmakta ve numunede uzama sırasında kopma gibi hatalar buralarda meydana gelmektedir.
- Boyunlaşmanın yaşandığı sünek malzemelerde numunenin orta kısmı daraltılarak numunede uzamanın ve kopmanın orta kısımda oluşması sağlanır.
- Yani kopmalar standart ince kesitten kopar.
- Burada boyunlaşmaya kayma gerilmeleri sebep olmaktadır.

Elyaf takviyeli kompozit malzemeler için;

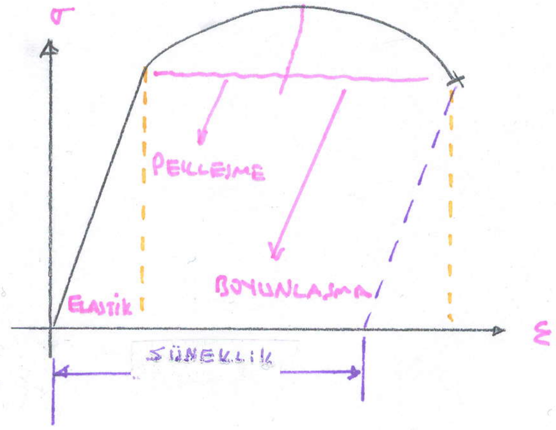
- Gevrek olan bu numunelerde numune şekli düz dikdörtgendir.
- Kompozit malzemelerde kopmanın nereden olacağı belli olmaz.
- Bu yapılarda iç boşluk, debounding veya delaminasyon gibi hatalar olabilir.
- Dolayısıyla numuneye daraltma gibi ekstra bir hata eklenmez.
- Fakat numuneler çenelere bağlanırken tablar ile bağlanır.
- Tablar dörtgen prizmatik parçalardır ve numunenin çeneye tutturulacak kısmına yapıştırılırlar.
- Çeneler numuneye baskı yapıp ezerek çentik etkisinin oluşması da böylece engellenmiş olunur.
- Diğer izotropik gevrek yapılarda da radiuslu daraltma ile hata payı verilebilir.

– Çekme eğrisi;

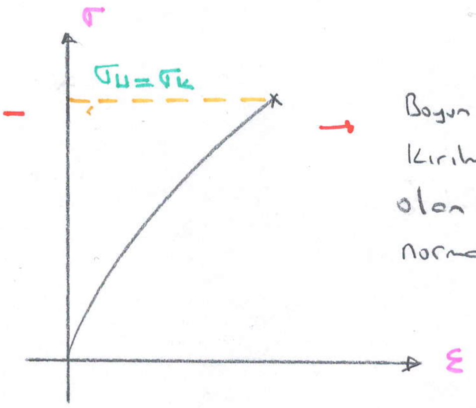


Y: Akma noktası.
E: Elastik limit.
P: Orantı sınırı.

Düşük karbonlu çelik.

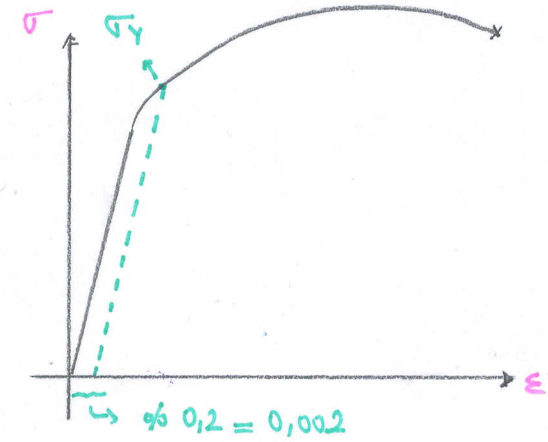
– 

Alüminyum alaşımı

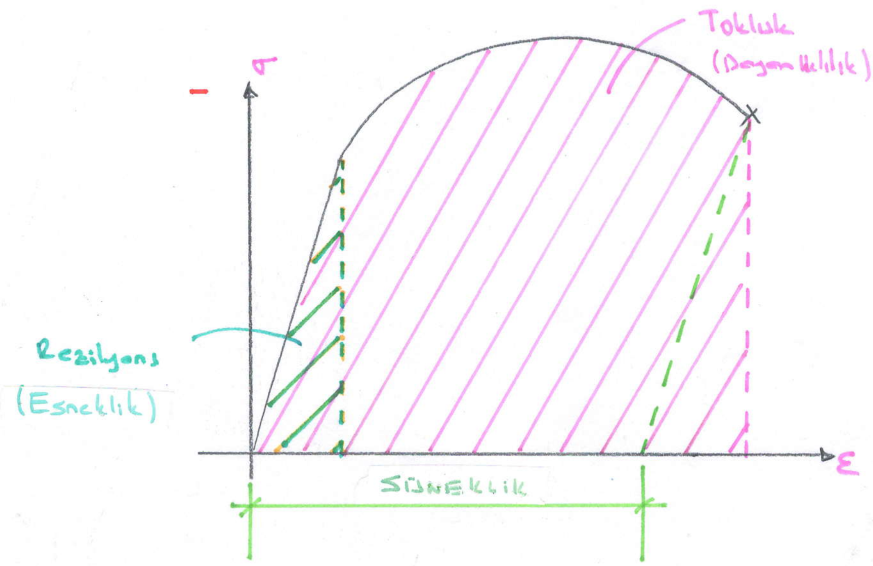
– 

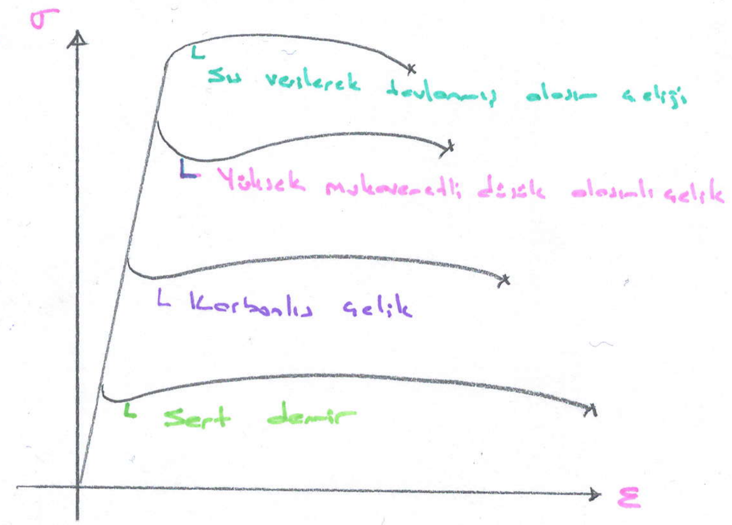
→ Boyun verme yok. Kırılmaya sebep olan daha çok normal gerilmelerdir.

Tipik gevrek malzeme

– 

Kaydırma yöntemi

– 

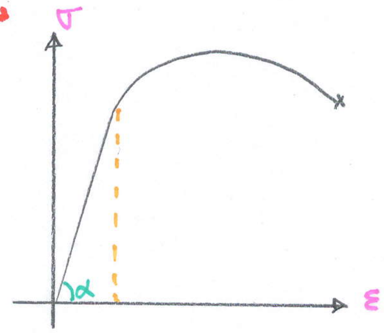
– 

Tokluk: Malzemenin kırılmasına kadar absorbe edilen – harcanan enerji. Aynı zamanda dayanıklılık modülüdür.

Rezilyans; Malzemenin elastik kaldığı süre içerisindeki absorbe edilen – harcanan enerji. Aynı zamanda esneklik modülüdür.

Hooke Kanunu (Tek Eksenli Yükleme)

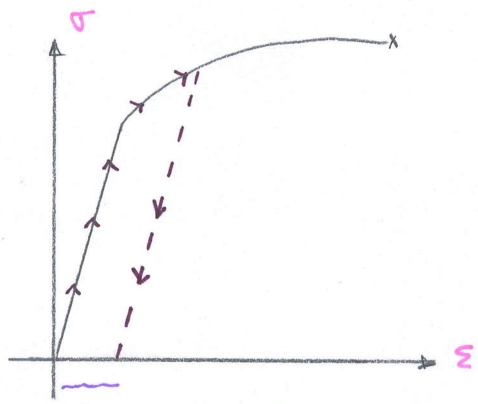
- Mekanik'in kurucularından Robert Hooke'a itafen ve ingiliz bilim adamı Thomas Young'a itafen ismi Hooke Kanunu olan bu kuramda;



- $\tan\alpha = E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ → Elastik bölgede geçerli

- Formülden anlaşıldığı üzere Hooke Kanunu gerilme ve gerinme (birim şekil değiştirme) arasındaki ilişkiyi ortaya koyar.

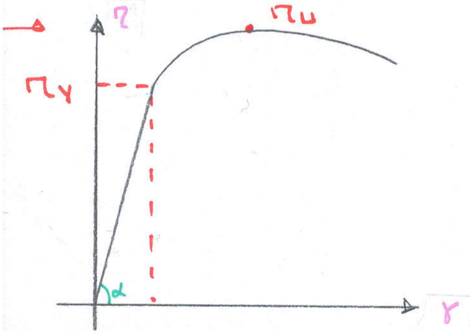
- Burada "E" elastisite veya young modülü olarak adlandırılır.
- E değeri bize malzemenin lineer aralıkta deformasyona direnç kabiliyetini yani rijitlik ölçüsünü verir.
- Mekanik özellikleri her yönde aynı olan izotropik malzemelerde $E = \sigma / \varepsilon$ bağıntısı yükleme yönünden bağımsızdır.
- Elyaf takviyeli kompozit malzemelerde üç yönde farklı E_1, E_2 ve E_3 değeri vardır.



Plastik (Kalıcı) Deformasyon

- Plastik deformasyon sadece gerilmenin ulaştığı max. değere değil aynı zamanda yük kaldırılana kadar geçen süreye de bağlıdır.
- Plastik deformasyonun gerilmeye bağlı kısmına kayma, zamana bağlı kısmına da (aynı zamanda sıcaklığa bağlı) sünme denir.

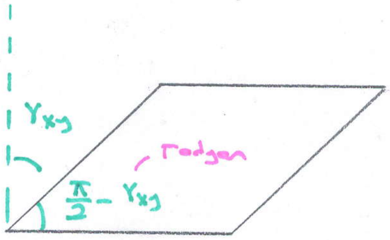
- Çekme eğrisinde malzemenin elastik davrandığı max. gerilme değerine elastik limit denir.
- Genellikle elastik limit akma mukavemetidir.
- Çekme testinin yanında malzemelere bir de bası ve burulma testleri yapılır.
- Tipik bir burulma testinde elde edilen eğri;

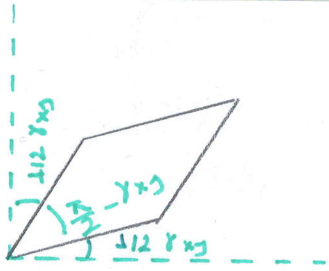


$\tan\alpha = G = \frac{\tau}{\gamma}$ (Elastik Bölge)

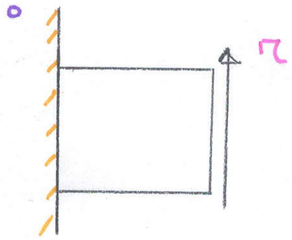
$\tau_y \cong \frac{\sigma_y}{2}$ $\qquad \tau_u \cong \frac{\sigma_u}{2}$

- Burada G kayma modülüdür. Ayrıca rijitlik modülü olarak da geçer.
- Yazılan bağıntı aynı şekilde bir Hooke bağıntısıdır.
- γ kayma açısıdır ve birim

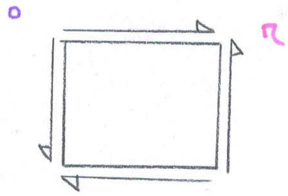




• $\tau = G\gamma$

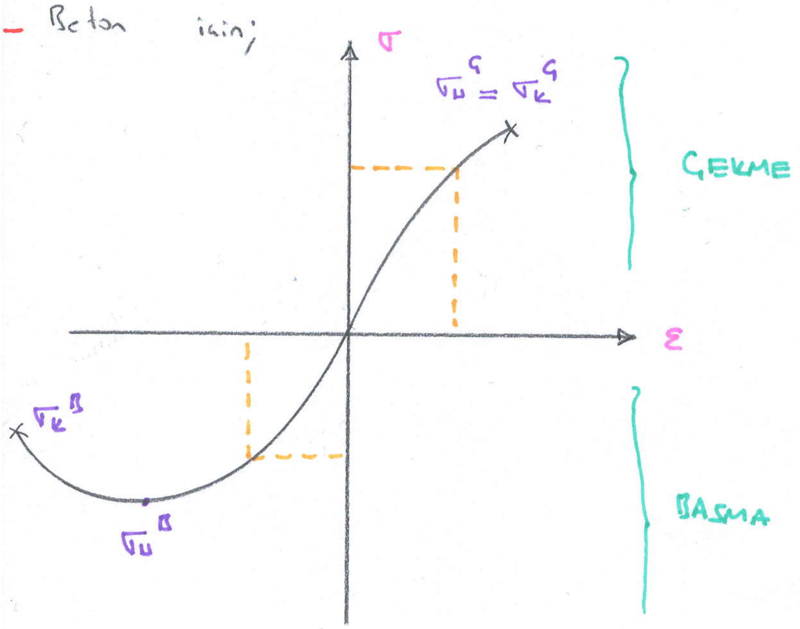
- 

Mühendislik Kayma Gerinimi



Tensör Kayma Gerinimi

- Malzemelere uygulanan benzer diğer bir test bası testidir.
- Basınç yükü altında;
  - Gerilim σ_y değeri çekmede ve basmada aynıdır.
  - Sünek malzemelerin $\sigma - \varepsilon$ eğrisi çeki ve basıda neredeyse aynıdır.
  - Gevrek malzemelerin basma testinde elde edilen σ_u değerleri daha yüksektir.
  - Buradan gevrek malzemelerin basıya daha dayanıklı olduğu görülür.
- Beton için;



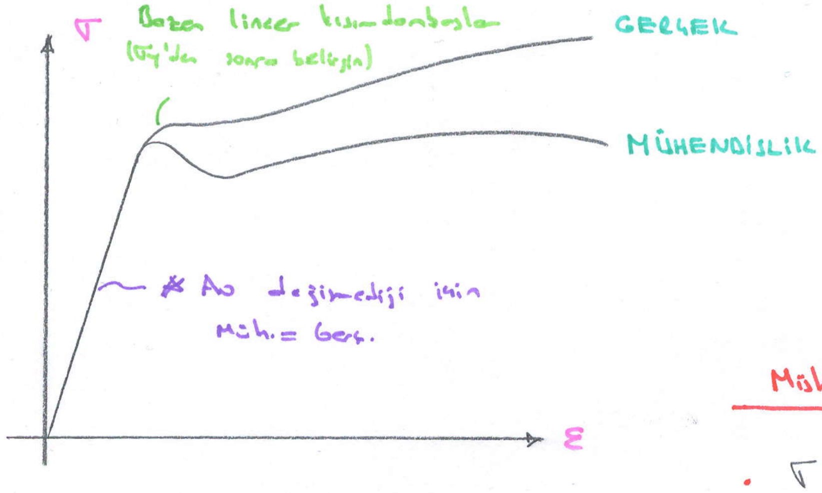
→ * − Lineer kısımda; basının lineer kısmı çekmeden daha büyük.

* − Fakat $E_Ç = E_B$

− Çekmede $\sigma_u = \sigma_k$

- Çekme eğrisinde;

→



- Mühendislik eğrisinde malzemenin hep Ao ilk kesit alanı dikkate alınır.
- Fakat gerçek eğride ise Ao kesit alanının değişimi ele alınır.

Mühendislik

- $\sigma^M = \dfrac{F}{A_o}$ • $\varepsilon^M = \dfrac{\Delta L}{L_o} = \dfrac{\delta}{L_o}$

Gerçek

$$\varepsilon^G = \int_{L_o}^{L_i} \frac{dL}{L} = \ln L_i - \ln L_o = \ln \frac{L_i}{L_o}$$

$$V = A_o . L_o = A_i . L_i \Rightarrow A_i = A_o . \frac{L_o}{L_i}$$

$$\sigma^G = \frac{F}{A_i} = \frac{F}{A_o \frac{L_o}{L_i}} = \underbrace{\frac{F}{A_o}}_{\sigma^M} . \frac{L_i}{L_o} = \sigma^M . \frac{L_i}{L_o}$$

• $L_i = L_o + \delta$

⇒ • $\varepsilon^G = \ln \dfrac{L_i}{L_o}$ • $\sigma^G = \sigma^M . \dfrac{L_i}{L_o}$

- Süneklik ölçüsü;

• $\% \delta = 100 . \dfrac{L_f - L_o}{L_o}$ veya   • $\% \Delta A = 100 . \dfrac{A_f - A_o}{A_o}$ L_f - A_f → kırılma anındaki

Uzama Yüzdesi   Alan Büzülme Yüzdesi

↳ Çekme eğrisi üzerinde gösterildi (16)

- Artık gerilmeler; yükleme sonrası (plastik bölge) gerilmeler sıfıra inmez.
- Burada artık gerilmeler kalır.

- Sıcaklık σ − ε eğrisini etkiler.
- Zira sıcaklık sünekliğe ve gevrekliğe etkilidir.
- Çekme hızı ayrıca σ − ε eğrisini etkiler.
- Dolayısıyla çekme testi için belirli ASTM − ISO standartları kullanılır.

Sünek Malzemeler

- Sünek malzemelere örnek olarak; inşaat demiri (düşük karbonlu çelik) ve diğer birçok alaşım ihtiva eden metaller ele alınabilir.
- Normal sıcaklıkta akma yetenekleri vardır.
- Artan yük ile eğri uzun, büyük eğimli ve yavaş artar.
- Akma mukavemetinden sonra kuvvetin küçük artışı ile büyük bir deformasyon oluşur.
- Bu deformasyon eğik yüzeylerin kayması ile oluşur yani kayma gerilmeleri ile.
- Max. yük sonucu çapta azalma başlar ve buraya boyunlaşma denir.
- Kopma numunenin başlangıçtaki yüzeyi ile 45°'lik bir açı yapan koni biçimindeki yüzey boyunca oluşur.
- Bu da sünek malzemelerin kopmasına birinci derecede kayma gerilmelerinin sebep olduğunu göstermektedir.

Gevrek Malzemeler

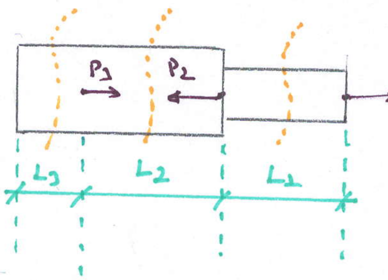
- Gevrek malzemelere örnek olarak; dökme demir, beton, cam ve taş gibi malzemeler ele alınabilir.
- Uzama hızlarında herhangi bir değişim olmadan kopmalarıyla bilinir.
- Dolayısıyla $\sigma_u = \sigma_k$ olarak bilinir.
- Kopma anındaki ε değeri sünek malzemelere göre çok küçüktür.
- Kırılma boyun vermeden olur ve kırılmaya – kopmaya birinci derecede normal gerilmeler sebep olmaktadır.

Yükler Sonucu Çubuklarda Oluşan Uzama

- $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{(P/A)}{E} = \dfrac{P}{AE}$; $\varepsilon = \dfrac{\delta}{L} \Rightarrow \delta = \varepsilon . L$

$$\Rightarrow \delta = \varepsilon . L = \left(\frac{P}{AE}\right) . L$$

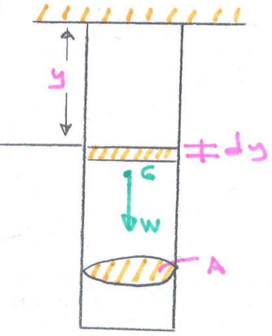
$$\Rightarrow \bullet\ \delta = \frac{PL}{AE} \qquad \bullet\ \sum \frac{P_i . L_i}{A_i . E_i}$$

- 

→ δ uzama formülünde iç kuvvetler baz alınır ve (+), (-) durumu fark eder. Ayrıca kuvvetlere göre uzunluklar dikkate alınır.

– Çubuğun kendi ağırlığının uzamaya olan etkisi incelenirse;

→



$$W = V\cdot\gamma = (A\cdot y)\cdot\gamma$$

$$\sigma = \frac{W}{A} = \frac{Ay\gamma}{A} = \gamma y$$

V: Hacim (m^3)

γ: Özgül ağırlık (N/m^3)

$$y=0 \Rightarrow \sigma = 0$$

$$y=L \Rightarrow \sigma = \gamma L = \sigma_{max} \quad , \quad \sigma = \sigma_y$$

$$\varepsilon_y = \frac{d\delta}{dy} \Rightarrow d\delta = \varepsilon_y\, dy$$

$$\Rightarrow \int_0^L d\delta = \int_0^L \varepsilon_y\, dy$$

$$\Rightarrow \delta = \int_0^L \frac{\sigma_y}{E}\, dy = \int_0^L \frac{\gamma y}{E}\, dy = \frac{\gamma}{E}\,\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^L$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\gamma L^2}{2E}\cdot\frac{A}{A} = \frac{\overbrace{(\gamma L A)}^{W} L}{2AE}$$

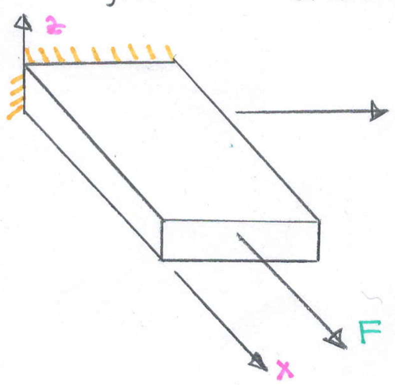
$$\Rightarrow \delta = \frac{WL}{2AE}$$

Poisson Oranı

– İsmi Fransız matematikçi Siméon Dennis Poisson'dan olan bir orandır.

– Uzamaya maruz bir çubukta enine uzamanın boyuna uzamanın birim şekil değiştirme cinsinden orandır.

–



$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{-\varepsilon_z}{\varepsilon_x} = \frac{\text{Enine}}{\text{Boyuna}} \rightarrow$$

Homojen çubuklarda $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$

– $$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \Rightarrow \varepsilon_y = -\nu\,\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

(Tek Eksenli Yükleme)

– Poisson oranı sayesinde $\varepsilon_y - \varepsilon_z$ değerleri σ_x cinsinden yazılabilir.

– Uzayan çubuğun hacmini koruması için boyu uzarken eni daralır.

– Poisson oranının eksi işareti daralmanın (–) olmasından dolayıdır. Yani bu eksi işaret ile ν değeri hep pozitiftir. (+) işaret boy uzarken en daralır demektir.

– Bazı özel polimerler için ν (–) değer alır yani boy uzadıkça en de büyümektedir. Bu tarz malzemelerde olsa bile ν (+) kabul edilir.

– Uzayan şekil için $\sigma_y = \sigma_z = 0$ kabul edilir.

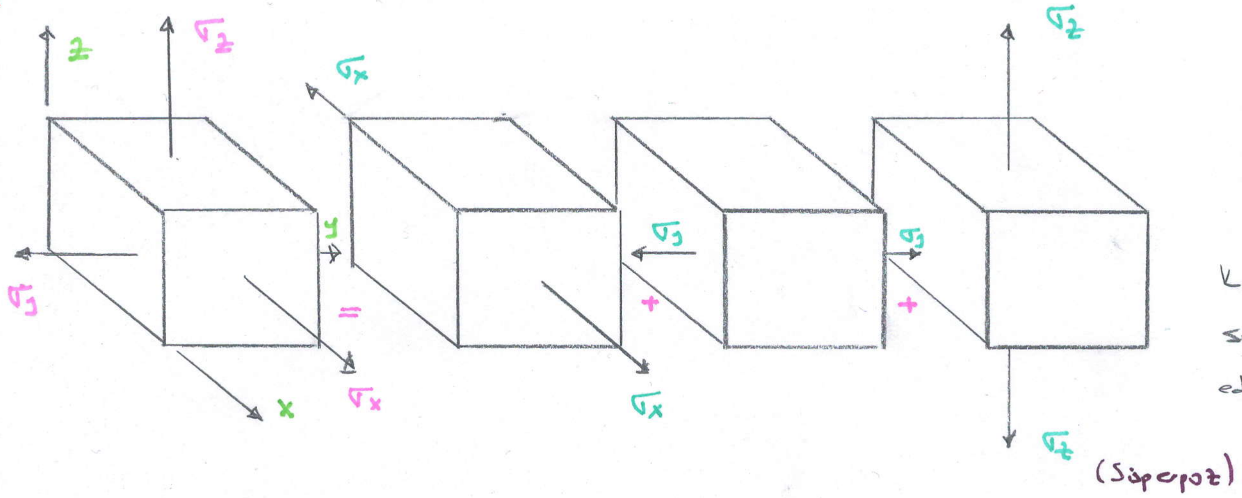
– Hacim değişimi aslında vardır ama burada yok kabul edilir.

Çok Eksenli Yükleme Durumu İçin Hooke Bağıntıları

(22)

- Hooke bağıntılarını çok eksenli yükleme durumunda yazmak için poisson oranına ihtiyaç vardır.

-



KABÜL

$\tau = 0$

Kayma gerilmeleri sıfır olarak kabul edilir.

- ▫ $\nu = -\dfrac{\varepsilon_y, \varepsilon_z}{\varepsilon_x} \Rightarrow \varepsilon_y, \varepsilon_z = -\nu . \varepsilon_x = -\nu \dfrac{\sigma_x}{E}$

▫ $\nu = -\dfrac{\varepsilon_x, \varepsilon_z}{\varepsilon_y} \Rightarrow \varepsilon_x, \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_y = -\nu \dfrac{\sigma_y}{E}$

▫ $\nu = -\dfrac{\varepsilon_x, \varepsilon_y}{\varepsilon_z} \Rightarrow \varepsilon_x, \varepsilon_y = -\nu . \varepsilon_z = -\nu \dfrac{\sigma_z}{E}$

→ Görüldüğü üzere $\varepsilon_y, \varepsilon_z$ değerleri σ_x cinsinden yazılabilir. $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ mesela σ_z cinsinden. Sadece ε_y σ_x veya σ_z cinsinden yazılabilir.

- Poisson oranı yardımı ile;

- $\varepsilon_x = \varepsilon_x^{\sigma_x} + \varepsilon_x^{\sigma_y} + \varepsilon_x^{\sigma_z}$
- $\varepsilon_y = \varepsilon_y^{\sigma_x} + \varepsilon_y^{\sigma_y} + \varepsilon_y^{\sigma_z}$
- $\varepsilon_z = \varepsilon_z^{\sigma_x} + \varepsilon_z^{\sigma_y} + \varepsilon_z^{\sigma_z}$

→ x yönündeki birim şekil değişimi σ_x, σ_y ve σ_z etkisi ile olmaktadır. Aynı şekilde diğer yönlerdeki birim şekil değiştirmelerde.

→ • $\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu \dfrac{\sigma_y}{E} - \nu \dfrac{\sigma_z}{E} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$

• $\varepsilon_y = -\nu \dfrac{\sigma_x}{E} + \dfrac{\sigma_y}{E} - \nu \dfrac{\sigma_z}{E} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$

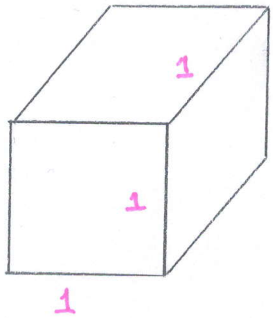
• $\varepsilon_z = -\nu \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu \dfrac{\sigma_y}{E} + \dfrac{\sigma_z}{E} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$

↳ $$\begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{vmatrix} = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{vmatrix}$$

- Görüldüğü üzere Hooke bağıntıları yine aynı şekilde gerilme ve gerinim arasındaki ilişkileri vermektedir.

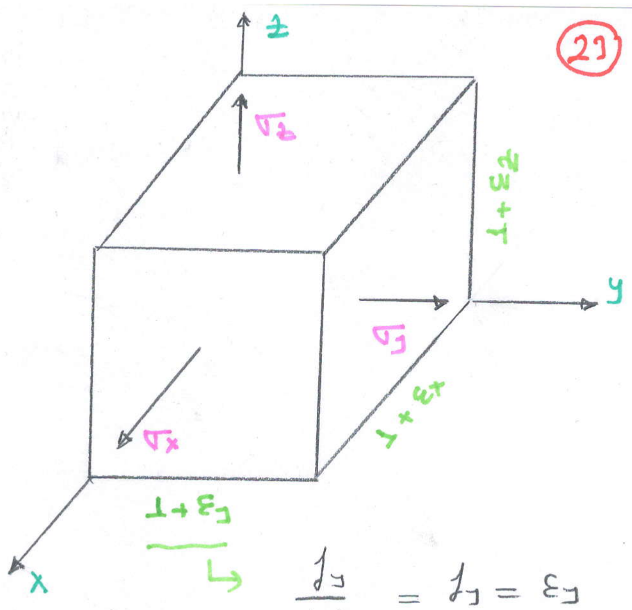
- Hacimsel genleşme, yığılma modülü;

→



Birim hacimli küp yüklenirse;

ε: Birim şekil değişimi olduğu için.



$$\frac{l_y}{L_0 \to 1} = l_y = \varepsilon_y$$

l_y yerine ε_y yazılabilir.

- Elde edilen küpün hacmi;

→ $$V = (1+\varepsilon_x) \times (1+\varepsilon_y) \times (1+\varepsilon_z)$$

- Bu çarpımdan elde edilecek $\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y$, ε_z^2 gibi ifadeler çok küçük olacaktır.
- Zaten ε_x, ε_y ve ε_z değerleri çok küçüktür. Çarpımları da çok küçük olacaktır.
- Dolayısıyla çarpımlı ifadeler ihmal edilirse yeni hacim;

→ $$V = 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$ olacaktır.

- Hacimdeki değişim;

$$\Delta V = V_f - V_0$$

$$V_f = 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$V_0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

→ $$\Delta V = V_f - V_0 = (\cancel{1} + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - \cancel{1} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = e$$

↳ "e" birim hacimdeki değişme veya genleşmedir. Dilatasyon olarak adlandırılır.

-

$V_0 = 1$ olduğu için;

→ $$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V}{1} = \Delta V = e \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = e$$

- Hooke bağıntıları ε_x, ε_y ve ε_z toplanırsa;

→ $$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = e = \frac{1-2\nu}{E} \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \right)$$ elde edilir.

- Cisim düzgün hidrostatik basınca maruz kalırsa;

$$e = \frac{1-2\nu}{E} \cdot (-3p)$$ olur.

→

- $k = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$ alınırsa $e = -\dfrac{p}{k}$ olur.

- k yığılma veya basınç modülüdür.
- k ifadesinin tanımlı olabilmesi için;

→ $1-2\nu > 0$ olmalı. Buradan;

$$\nu < \frac{1}{2}$$ elde edilir.

- Ayrıca $e = \dfrac{1-2\nu}{E}(-3p)$ ifadesinde de hacim değişiminin sıfır olamayacağı ve değişimin bası olduğu için negatif olması gerektiği göz önüne alınırsa;

→ $1-2\nu > 0$ ve $0 < \nu < \frac{1}{2}$ olduğu görülmektedir.

- Bu ifade bize poisson oranının hep pozitif olduğunu (bazı polimerler istisna) ve 0,5'den küçük olduğunu gösterir.
- $\nu < 0,5$ demek; enine birim şekil değişiminin boyuna şekil değişiminin yarısından fazla olamaz demektir.
- Malzemenin E, G ve ν olan üç temel özelliği arasında;

  - $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ bağıntısı vardır.

- Hooke bağıntıları toparlanırsa altı tanedir;

  - $\varepsilon_x = \dfrac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$
  - $\varepsilon_y = \dfrac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$
  - $\varepsilon_z = \dfrac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$
  - $\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}$
  - $\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz}$
  - $\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}$

NOT: 2 plaka arası sürek malzemeli problemlerde kayma aradaki malzemede meydana gelecektir. Ölçüler için (γ_{xy}) orta malzeme dikkate alınmalıdır.

- Hooke bağıntılarını gerilmelere bağlı yazmak istersek;

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] \quad , \quad \sigma_3 = 0 \text{ olsun;}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\sigma_2\right] \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu\sigma_1\right]$$

$$\Rightarrow E\varepsilon_1 = \sigma_1 - \nu\sigma_2 \qquad \Rightarrow E\varepsilon_2 = \sigma_2 - \nu\sigma_1$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = E\varepsilon_1 + \nu\sigma_2 \qquad \Rightarrow \sigma_2 = E\varepsilon_2 + \nu\sigma_1$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = E.\varepsilon_1 + \nu\,(E\varepsilon_2 + \nu\sigma_1)$$

$$= E.\varepsilon_1 + \nu E\varepsilon_2 + \nu^2.\sigma_1$$

$$\Rightarrow \sigma_1 - \nu^2\sigma_1 = E\varepsilon_1 + \nu E\varepsilon_2$$

$$\Rightarrow \sigma_1(1-\nu^2) = E\varepsilon_1 + \nu E\varepsilon_2$$

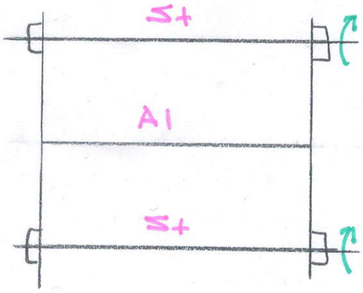
$$\Rightarrow \bullet\ \sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2\right]$$

Aynı şekilde → $\bullet\ \sigma_2 = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1\right]$

- $\sigma_3 = 0$

AYRICA;

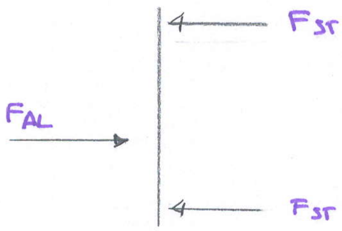
- $\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x$
- $\sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y$
- $\sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z$
- $\lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ (MPa)
- $e = \dfrac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$
- $G = \dfrac{\tau}{\gamma} = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = \dfrac{\tau}{2\varepsilon}$
- $\sigma_x = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right]$
- $\sigma_y = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)\right]$
- $\sigma_z = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right]$



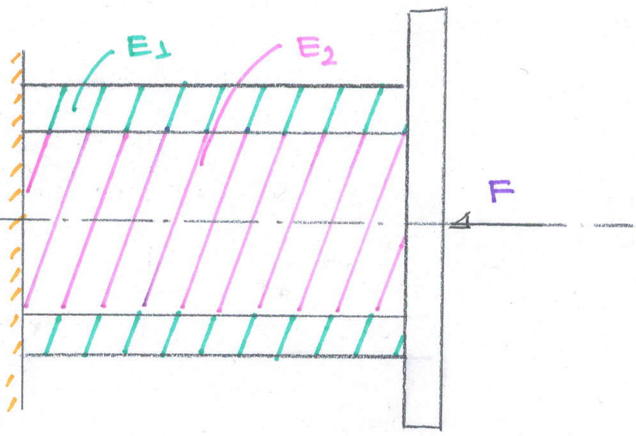
$\delta_T = \delta_{ST} - \delta_{AL}$ .... (1) (Biri uzuyor, biri kısalıyor)

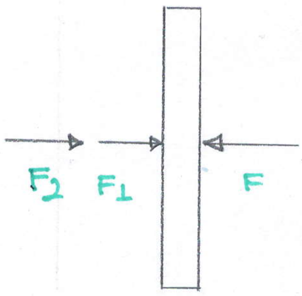
+

2 ile çarpılmaz zira paralel deplasman var.



$\Rightarrow$ $F_{AL} = 2 \cdot F_{ST}$ ... (2)





$F = F_1 + F_2$ ... (1)

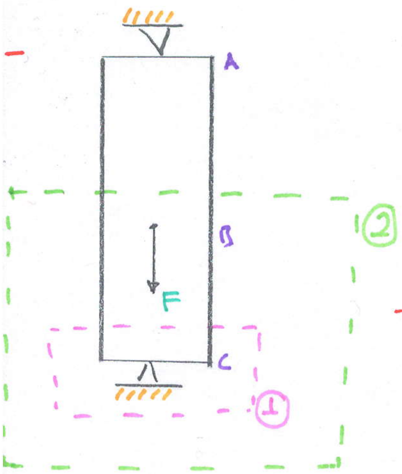
$\delta_1 = \delta_2$ ... (2)

İki parçada eşit uzayıp kısalıyor.

Civata →

Sıkılırsa;

Gevşetilirse;



- $\delta = \delta_{AC} + \delta_{BC} = 0$. F_1, F_2 (+, −) olabilir.
- Kademeli olursa kesitin değiştiği yerde kesme yapılır.
- Süperpoze etmeye gerek yok.

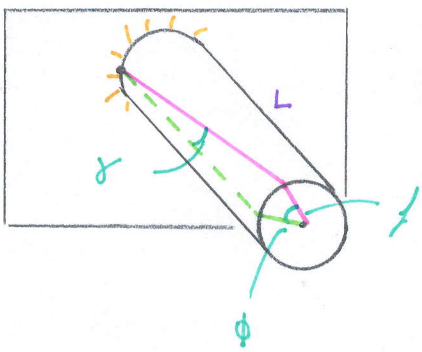
Sıcaklık ile Uzama

-

• $\delta_T = \alpha \, \Delta T \, L$ ($L \downarrow L_0$) • $\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = \alpha \, \Delta T$ • $\sigma_T = - E \, \alpha \, \Delta T$

BURULMA

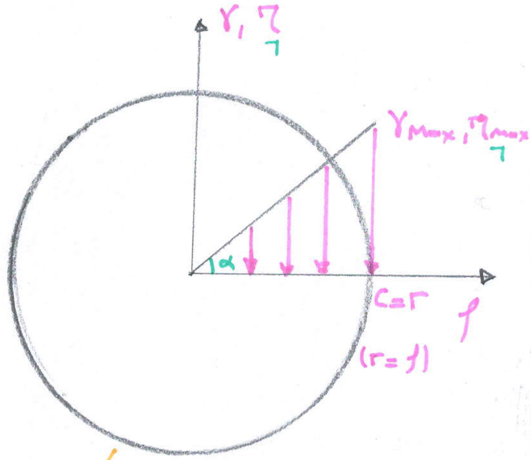
- Dairesel kesitli parçalarda burulma sonucu oluşan deformasyonda enine kesit düzlemlerinde bir değişiklik olmaz.

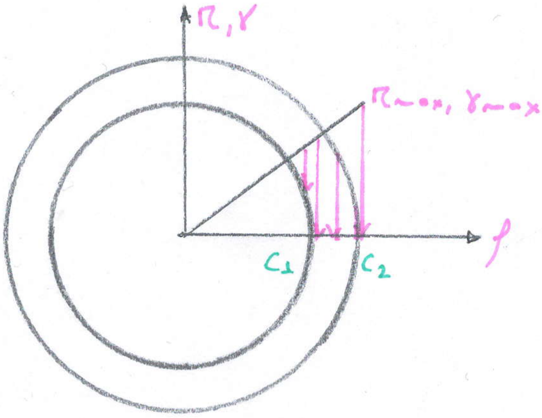
- 

→ $\gamma . L = \phi . \rho$ ⟹

⟹ $\gamma = \frac{\rho . \phi}{L}$

γ − ρ ile lineer değişir



- 

- Lineer kısım incelenirse;

→ $\tan\alpha = \frac{\gamma_{max}}{c} = \frac{\gamma}{\rho} \Rightarrow \gamma = \frac{\rho}{c} . \gamma_{max}$

$$\underbrace{G . \gamma}_{\tau} = \frac{\rho}{c} \underbrace{G . \gamma_{max}}_{\tau_{max}} \Rightarrow \tau = \frac{\rho}{c} . \tau_{max}$$

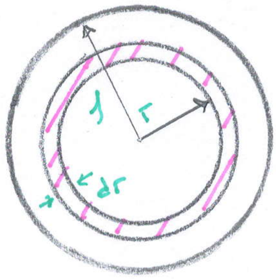
- $T = \int \rho . (\tau . dA) = \int \rho \left(\frac{\rho}{c} . \tau_{max} \right) dA = \frac{\tau_{max}}{c} \underbrace{\int \rho^2 \, dA}_{J \text{ Polar Atalet Momenti}} = \frac{\tau_{max} . J}{c}$

⟹ $T = \frac{\tau_{max} . J}{c}$ ⟹ • $\tau_{max} = \frac{T . c}{J}$

- Dairesel kesitlerde;

→ • $\tau_{max} = \frac{T D}{2 J}$

NOT:



$J = \int_0^{\rho} r^2 . dA = \int_0^{\rho} 2\pi r . dr = 2\pi \frac{\rho^4}{4}$, $\rho = c = r$

$dA = 2\pi r . dr$

⟹ • $J = \frac{\pi D^4}{32}$

- Silindirik parçalarda burulma sonucu; sünek malzemeler koparken gevrek malzemelerde 45°'lik bir açı ile kırılma meydana gelir.
- Aynı ağırlığa sahip şaft sorularında $A_1 = A_2$ olmalı

Burulma Açısı

- $\gamma . L = \phi . r \quad (r = c = r)$

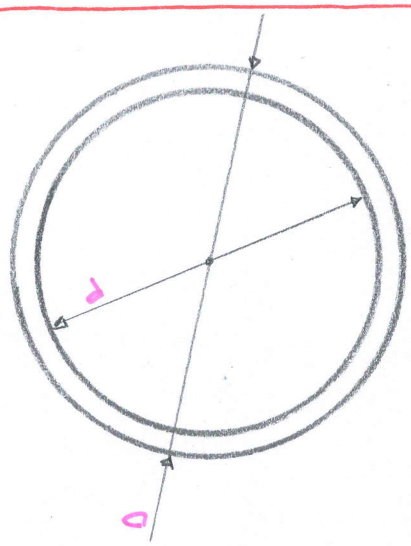
$\Rightarrow \gamma = \frac{\phi . r}{L} = \frac{c}{L} . \phi$ (1), $\quad \tau = G\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{\tau}{G}$ (2)

$\Rightarrow \frac{\tau}{G} = \frac{c}{L}\phi \Rightarrow \phi = \frac{\tau L}{Gc}$, $\quad \tau = \frac{Tc}{J}$

$\Rightarrow$ • $\phi = \frac{T . c L}{G c J} = \frac{T}{GJ} . L$ (rad) • $\theta = \frac{\phi}{L} = \frac{T}{GJ}$ (rad/mm)

• $\phi = \frac{\Sigma T_i . L_i}{\Sigma G_i . J_i}$ • $\phi = \int_0^L \frac{T}{GJ} dx$

İnce Cidarlı Tüplerde Burulma

- 

$J = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi}{2}(R_o^4 - R_i^4)$

Çarpanlarına ayrılırsa

$\Rightarrow J = \frac{\pi}{2}(R_o^2 + R_i^2)(R_o^2 - R_i^2)$

$= \frac{\pi}{2}\underbrace{(R_o^2 + R_i^2)}_{2R_o^2}\underbrace{(R_o - R_i)}_{t}\underbrace{(R_o + R_i)}_{2R_o}$

$\Rightarrow J = \frac{\pi}{\cancel{2}} t . \cancel{2}R_o . 2R_o^2 = 2\underbrace{(\pi R_o^2)}_{A_o} R_o t$

$\Rightarrow J = 2A_o . R_o . t$ veya $J = 2I = 2 . \pi t r^3$

↳ ilerleyen sayfalarda mevcut. Sayfa: 42

-• $\tau_o = \frac{T R_o}{J} = \frac{T \cancel{R_o}}{2A_o \cancel{R_o} t} = \frac{T}{2A_o t}$

↳ $t_{max} \rightarrow \tau_{min}$

$t_{min} \rightarrow \tau_{max}$ (Kapalı Tüpler)

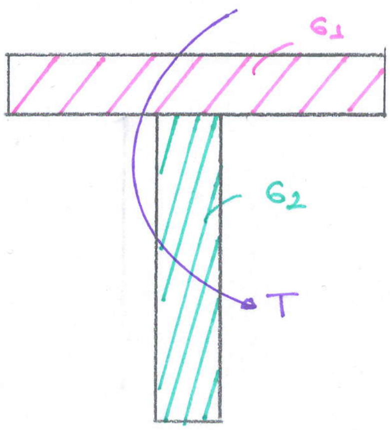
→

- $$\theta = \frac{\phi}{L} = \frac{T}{GJ} = \frac{T}{G \cdot 2A_0R_0t} = \frac{T}{G\,2(\pi R_0^2)R_0 t} = \frac{T}{G\,2\pi t R_0^3} \quad \frac{2\pi R_0}{2\pi R_0}$$

→ $$\theta = \frac{T}{4G(\pi R_0)^2} \cdot \frac{s}{t} \Rightarrow \cdot\ \theta = \frac{T}{4GA_0^2} \cdot \frac{s}{t} \quad (r/mm)$$

NOT: $$\frac{D}{180} = \frac{r}{\pi} = \frac{G}{200}$$

Kompozit Tüplerde Burulma



→ İki farklı malzeme olsa bile, iki malzeme bir bütün olarak aynı derecede dönmelidir. Ayrıca iki malzemede torku birlikte taşımalıdır.

Dolayısıyla;

→ • $T = T_1 + T_2$ → Denge şartı

• $\theta = \theta_1 = \theta_2$ → Uygunluk şartı

• $\frac{T_1}{J_1} \cdot t_1 \leq \tau_{em-1}$ • $\frac{T_2}{J_2} \cdot t_2 \leq \tau_{em-2}$

T_1 ve T_2, T cinsinden yazılmalı • $\frac{T}{(GJ)_{eş}} = \frac{T_1}{G_1J_1} = \frac{T_2}{G_2J_2}$ • $(GJ)_{eş} = G_1J_1 + G_2J_2$

Bölmeli Tüplerin Burulması

- • $T = \Sigma T_i$
- • $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \dots = \theta_n$
- • $T = 2\Sigma A_i \cdot q_i$

—o—

- Silindirik parçalarda burulma sonucu şeklini tamamen koruduğu kabul edilir.
- Dörtgen kesitlerde ise cisimin sadece ön yüzünü koruduğu kabul edilir.
- Dörtgen kesitlerde ayrıca köşe ve kenarlarda da deformasyon yoktur.
- Dolayısıyla buralarda $\tau = 0$ olur.
- Fakat orta kısımda kayma gerilmesi max. olmaktadır.

Açık Tüplerde Burulma

- $\tau^T = \dfrac{T}{C_1 . ab^2}$ • $\phi = \dfrac{T}{G c_2 ab^3} . L$ veya • $\tau^T = \dfrac{T.c}{J} = \dfrac{T}{J} . t$

$t_{max} \rightarrow \tau_{max}$

$t_{min} \rightarrow \tau_{min}$

(Açık Tüpler)

• $\phi = \dfrac{T}{GJ}$

- a uzun kenar, b ise kısa kenardır.
- C_1 ve C_2 a/b oranına bağlıdır.
- Kesik çemberde ince cidarlı eleman olarak alınır. (Açık tüp)
- $a/b \geq 5 \Rightarrow C_1 = C_2$
- $a/b \geq 10 \Rightarrow C_1 = C_2 = 1/3$
- $C_1 = \alpha$, $C_2 = \beta$ denilebilir.
- $a/b > 10$ ise ince cidarlı kabul edilir.
- Dairesel olmayan kesitlerde içi boş ve kalın cidarlı yapılar burulmaya daha dayanıklıdır.
- Dairesel kesitli yapılarda ise içi dolu olanlar daha dayanıklıdır.

Motor Gücü

- • $P = T . w$ • $w = 2\pi f$ $\Rightarrow$ $P = 2\pi f . T$

W Tork Açısal Hız

• $kW = 10^3 \ N \dfrac{m}{s}$

$\Rightarrow$ $T = \dfrac{P}{2\pi f}$

Nm W s^{-1}

• $n = rpm = dev/dk$

• $f = Hz$

• $f = \dfrac{n}{60}$ veya

60 s — x rpm

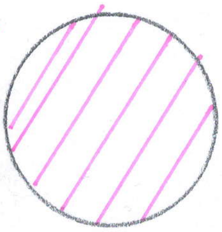
1 s — ? rpm

$? = \dfrac{x}{60}$ Hz veya s^{-1}

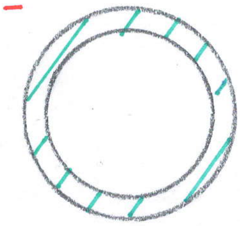
• $9550 . \dfrac{P}{n} = F . \dfrac{D}{2}$

kW N m rpm

Formüller



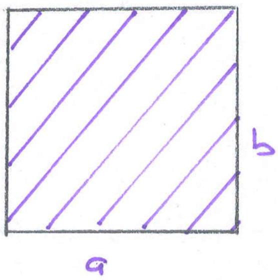
- $\tau = \dfrac{TD}{2J}$
- $J = \dfrac{\pi D^4}{32}$
- $\phi = \dfrac{T}{GJ} \cdot L$
- $\theta = \dfrac{\phi}{L}$



KALIN CIDARLI

- $\tau = \dfrac{TD}{2J}$
- $J = \dfrac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$
- $\phi = \dfrac{T}{GJ} \cdot L$
- $\theta = \dfrac{\phi}{L}$

→ Kesik çemberde olabilir.



a: uzun kenar

b: kısa kenar

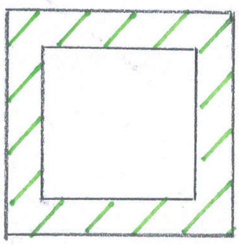
- $\tau = \dfrac{T}{J} \cdot t$
- $\phi = \dfrac{T}{GJ} \cdot L$

Veya

- $\tau = \dfrac{T}{\alpha a b^2}$
- $\phi = \dfrac{T}{G \beta a b^3} \cdot L$

İNCE CİDARLI

- $\tau = \dfrac{T}{2 A_0 t}$
- $\phi = \dfrac{T}{4 G A_0^2} \cdot \dfrac{s}{t} \cdot L$
- $s = 2\pi R_0$
- $J = 2 A_0 R_0 t = 2 \pi t r^3$



İNCE CİDARLI

- $\tau = \dfrac{T}{2 A_0 t}$
- $\phi = \dfrac{T}{4 G A_0^2} \cdot \dfrac{s}{t} \cdot L$

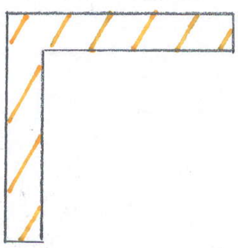
$\dfrac{s}{t} = \sum \dfrac{s_i}{t_i}$

KALIN CİDARLI

- $\tau = \dfrac{T}{J} t$ (τ_{max} @ t_{max})

$\phi = \dfrac{T}{GJ} \cdot L$

$J = \dfrac{1}{3} b t^3$



KALIN CİDARLI

- $\tau = \dfrac{T}{J} \cdot t$
- $\phi = \dfrac{T}{GJ} \cdot L$
- $J = \dfrac{1}{3} \sum b t^3$

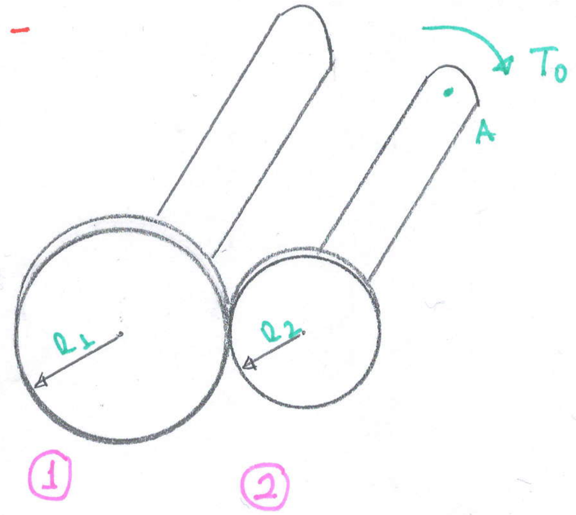
İNCE CİDARLI

- $\tau = \dfrac{T}{\alpha a b^2}$
- $\phi = \dfrac{T}{G \beta a b^3}$

a: Toplam çevre uzunluğu

b: t

NOT: -



$\rightarrow$ $T_1 = T_0 = F_1 . r_1$

$T_2 = F_2 . r_2$

$F_1 = F_2 = F$

$\Rightarrow F = \dfrac{T_1}{r_1}$ $\quad F = \dfrac{T_2}{r_2}$

$\Rightarrow \dfrac{T_1}{r_1} = \dfrac{T_2}{r_2} \Rightarrow T_1 = T_2 \dfrac{r_1}{r_2}$

Farklı

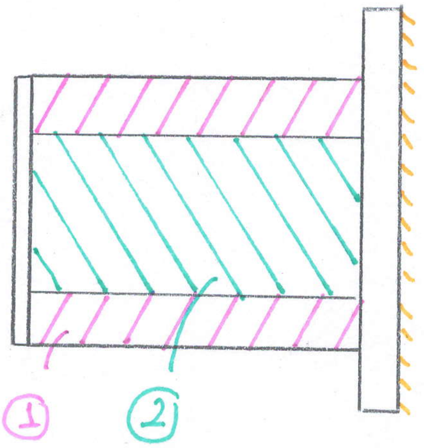
$\phi_1 . r_1 = \phi_2 . r_2 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2 \dfrac{r_2}{r_1}$

$\phi_A = \phi_A^{T_0} + \phi_A^{(1)}$

$\dfrac{T_0}{GJ} . L$

$\phi_2 = \phi_1 . \dfrac{r_2}{r_1}$

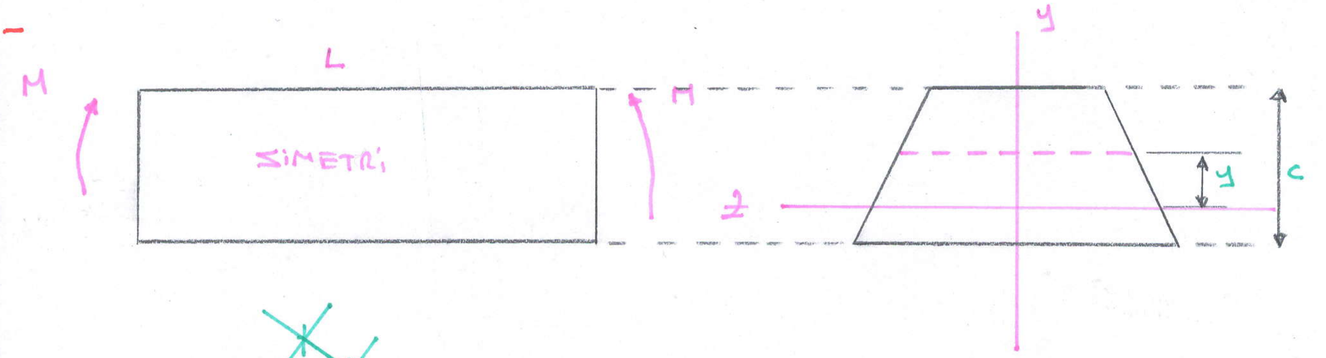
$\phi_1 = \dfrac{T_1}{GJ} . L$

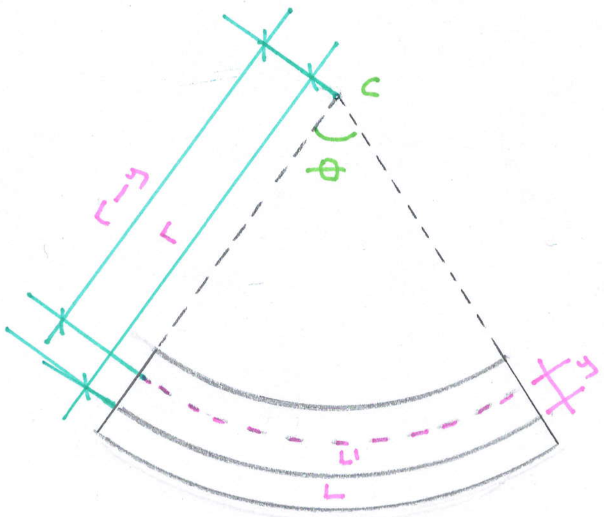


- $\Sigma T = T_1 + T_2$
- $\phi_1 = \phi_2$

$\rightarrow$ Örneğin $T_1 = T_2 . 0,3$ olsun. Buradan $T_2 = T_1 / 0,3$ ile τ bulunup τ_{em} ile kıyaslanmalı. $\tau > \tau_{em}$ olursa T_2 direkt kullanılarak τ bulunmalı ve τ_{em} ile kıyas yapılmalı.

BASİT EĞİLME





→ $r \cdot \theta = L$

$(r-y) \cdot \theta = L'$

$\delta = L' - L$

$\delta = (r-y)\theta - r\theta$

$\Rightarrow \delta = -y\theta$

r: Eğrilik yarıçapı

$\Rightarrow$ $$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{L} = \frac{-y\theta}{r \cdot \theta} \Rightarrow \varepsilon_x = -\frac{y}{r}$$

↳ ε_x boyuna olan değişim yani y uzunluğu ile lineer değişir.

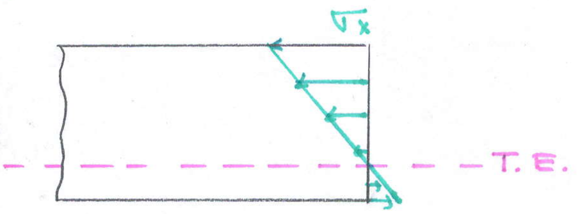
$\Rightarrow$ $y_{max} = c$ (Üst- Alt yüzey)

$\Rightarrow$ $$\varepsilon_{max} = \varepsilon_m = +\frac{c}{r} \text{ (Mutlak)} \Rightarrow r = \frac{c}{\varepsilon_m} \Rightarrow \varepsilon_x = -\frac{y}{c/\varepsilon_m} = -\frac{y}{c}\varepsilon_m$$

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{c} \cdot \varepsilon_m, \quad \sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \Rightarrow \sigma_x = -\frac{y}{c} \cdot \underbrace{\varepsilon_m \cdot E}_{\sigma_M}$$

$\Rightarrow$ $\sigma_x = -\frac{y}{c} \cdot \sigma_M$ → σ_x y ile lineer değişir.

→



@T.E.

→ $$\int \sigma_x \, dA = 0$$

$$\Rightarrow \int -\frac{y}{c} \cdot \sigma_M \cdot dA = 0 = -\frac{\sigma_m}{c} \underbrace{\int y \, dA = 0}_{Q=0}$$

Tarafsız eksende gerilmeler sıfırdır. Ve tarafsız ağırlık merkezinde geçer. Zira burada Q statik moment sıfırdır. ✱ ✱ ✱

→

$$\underbrace{M}_{\text{Moment}} = \int -y \, (\sigma_x \, dA) \Rightarrow \int (-y)\left(-\frac{y}{c}\,\sigma_m\right) dA = M$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_m}{c} \underbrace{\int y^2 \, dA}_{I} = M$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_m}{c} \cdot I = M \Rightarrow \sigma_m = \frac{M \cdot c}{I} \quad , \quad \sigma_m = -\frac{c}{y} \cdot \sigma_x$$

$$\frac{M \cdot \cancel{c}}{I} = -\frac{\cancel{c}}{y}\,\sigma_x \Rightarrow \sigma_x = -\frac{M \cdot y}{I}$$

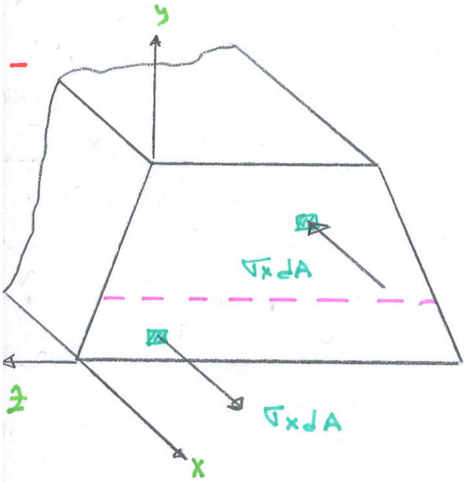
$-$

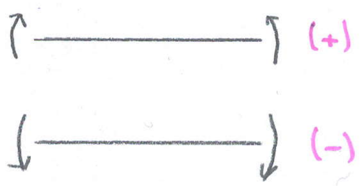
$+y \rightarrow$ Bası

$-y \rightarrow$ Çeki

$$\varepsilon_m = \frac{c}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_m}{c} = \frac{\sigma_m}{E} \cdot \frac{1}{c} = \frac{Mc}{IE} \cdot \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{M}{EI}$$ Eğrilik

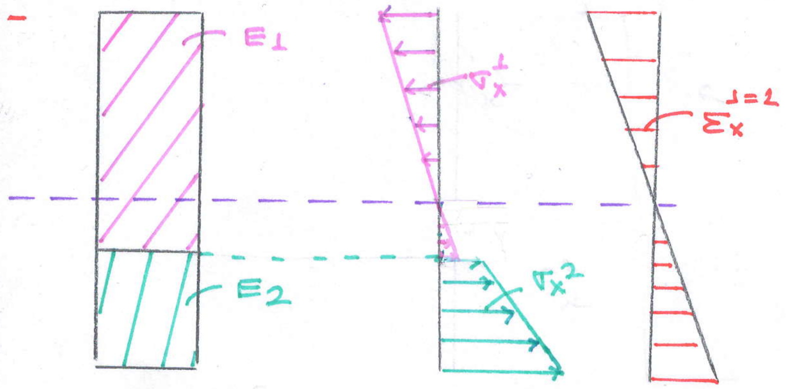




- Cisim eğildiği zaman kesit düzlemi sabit kalmaktadır.
- Cisim eğilince yay formunu alır ve merkezi eşit C noktası gibi olur.

- Şekilde üst yüzeyin boyu azalır (+M) alt boy ise uzar (−M). Buna sebep olan $\pm \sigma_x$ gerilmeleridir.
- Yüzeyde sadece $\pm \sigma_x$ gerilmeleri mevcuttur. Kayma gerilmeleri ve diğer eksenlerdeki gerilmeler sıfırdır. Aksi halde kesit düzlemler sabit kalmazdı.
- $+\sigma_x$ ve $-\sigma_x$ gerilmelerinin geçiş düzlemi vardır.
- Sorularda σ_y ve σ_u verilirse $\sigma_{em} = \frac{\sigma_u}{S}$ kullanılır fakat ayrıca bu değer $\sigma_{em} < \sigma_y$ olmalıdır.

Kompozit Malzemelerde (Birleşik) Eğilme



- $\varepsilon_x = -\dfrac{y}{r}$
- $\sigma_1 = \varepsilon_x E_1 = -\dfrac{y}{r} E_1$
- $\sigma_2 = \varepsilon_x E_2 = -\dfrac{y}{r} E_2$

$\Rightarrow$ $dF_1 = \sigma_1 \, dA = -\dfrac{y}{r} E_1 \, dA$ $\qquad E_2 > E_1$ olsun

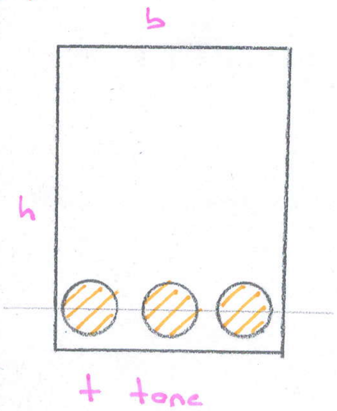
$dF_2 = \sigma_2 \, dA = -\dfrac{y}{r} E_2 \, dA$ $\qquad \dfrac{E_2}{E_1} = n \rightarrow n = \dfrac{\text{Genişletilen}}{\text{Sabit olan (Hedef)}}$

dF_2 dF_1 cinsinden; $dF_2 = -\dfrac{y}{r} n . E_1 \, dA = -E_1 \dfrac{y}{r} . (n \, dA)$

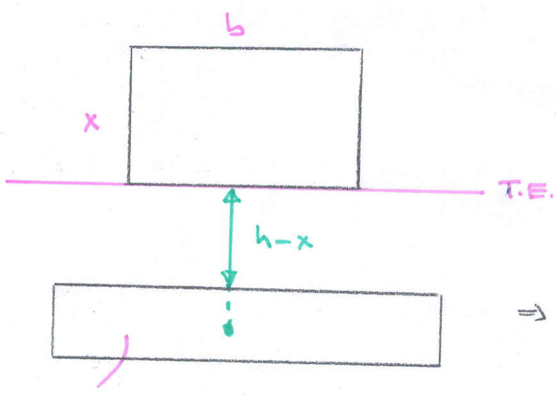
→ - 2. malzemenin alanı n ile çarpılırsa malzeme yekpare olarak eşitlenir.

- Fakat burada alan n ile genişletilirken tarafsız eksen doğrultusunda genişletilmelidir.
- Aksi halde ε_x eşitliği yani y mesafesi bozulur.
- Sorularda $n = E_2 / E_1$ bulunur. Parça genişletilir ve yeni boyutla ile $\bar{y}$ ve I bulunur. (E'si büyük olan genişletilir)
- Yeni T.E. $\bar{y}$ mesafeli G'den geçer.
- σ_1 normal şekilde bulunur ve dönüşen için $\sigma_2 = \sigma_1 . n$ kadar genişletilmelidir.
- Eğrilik ise $\dfrac{1}{r} = \dfrac{M}{E_1 I}$ ile bulunur.
- Çelikli betonlar için ya da çivili parçalar için;

→



$n = \dfrac{E_ç}{E_n}$



$A_ç = t . \dfrac{\pi D^2}{4}$

Betonun tabanı $\dfrac{bh^3}{3}$

$I = I_b + I_ç$

$= \left[\dfrac{b x^3}{3}\right] + \cancel{\bar{I}_ç} + A_ç . d_y^2$ (ihmal)

$n . A_ç (h-x)^2$

$Q = 0$

$\Rightarrow \left[(bx) \dfrac{x}{2}\right] - \left[(nA_ç)(h-x)\right] = 0$

$x = \bar{y}$ (T.E.)

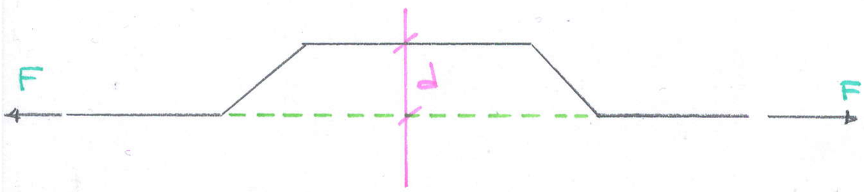
$\Delta = b^2 - 4ac$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{}$

NOT: Genişletilen T profil olursa tüm genişlikler gösterilmelidir.

Dış Merkezli Eksenel Yükleme

\-



$=$

$\sigma_x = \sigma_F + \sigma_M \rightarrow$

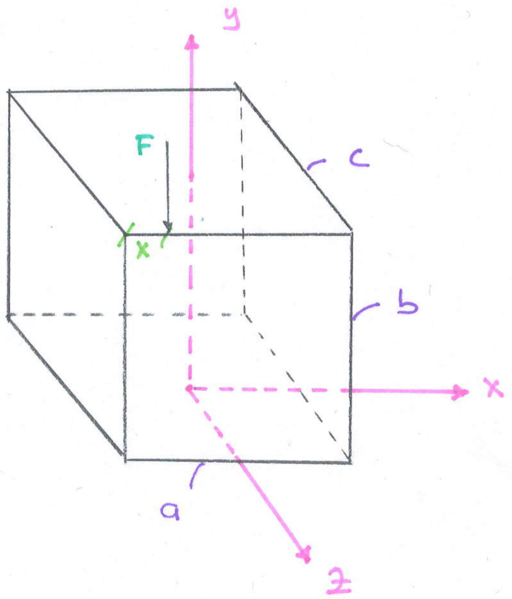
ÇEKME	BASMA	
• $\sigma_x = +\sigma_F + \sigma_M$	• $\sigma_x = -\sigma_F - \sigma_M$	(Bu şekil için)

\- Kesit T profil bile olsa σ_F için tüm alan hesaplanır.

\- ÇEKME $\rightarrow$ $\sigma_M = \dfrac{M \cdot C_{Ç}}{I}$ $\rightarrow$ Eğilme durumuna göre (+) olan uzayan kısma olan mesafe

BASMA $\rightarrow$ $\sigma_M = \dfrac{M \cdot C_B}{I}$ $\rightarrow$ Eğilme durumuna göre (−) olan kısalan kısma olan mesafe.

\-



• $M_x = F \cdot \dfrac{c}{2}$

• $M_z = F \cdot \left(\dfrac{a}{2} - x\right)$

Simetri Olmayan Eğilme (Eğik Eğilme)

- Düşey veya yatay eksene göre simetri olmayan parçalara ağırlık merkezlerinin hizasında kuvvet uygulansa da eğilme yanında burulma oluşur.

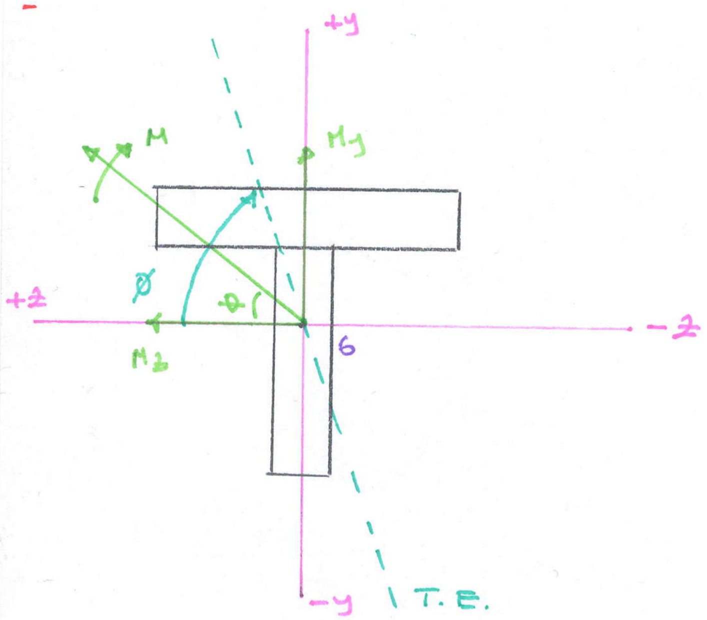
- Simetri parçalarda ise kuvvet merkez dışına uygulanırsa eğik eğilme oluşur.

- Eğik eğilmeye sebep olan iç(?) kayma akımının burulma oluşturması ve dengelenememesidir.

- Simetri olan parçalarda $\vec{M}$ vektörü tarafsız eksen üzerindedir.

- Simetri olmayan eğilmede T.E. referans alınan eksene göre $\emptyset$ açısı kadar eğimlidir.

-



- $\sigma_x^{M_y} = + \dfrac{M_y \cdot z}{I_y}$

- $\sigma_x^{M_z} = - \dfrac{M_z \cdot y}{I_z}$

Bu şekil için;

$M_y \rightarrow$ $-z$ bası $(-)$, $+z$ çeki $(+)$

$M_z \rightarrow$ $+y$ bası $(-)$, $-y$ çeki $(-)$

σ_x fonksiyonlarındaki işaretler buna göre yapılır.

$\Rightarrow$ • $\sigma_x = - \dfrac{M_z \cdot y}{I_z} + \dfrac{M_y \cdot z}{I_y}$

* $\vec{M}$ 6 üzerine etkiyor.

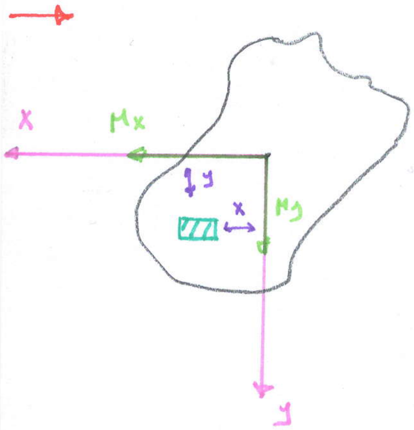
- T.E. üzerinde gerilmeler sıfır olduğu için;

$\rightarrow$ $\sigma_x^{T.E.} = 0 \Rightarrow -\dfrac{M_z \cdot y}{I_z} + \dfrac{M_y \cdot z}{I_y} = 0 \Rightarrow \underbrace{\dfrac{M_y}{M_z}}_{\tan\theta} \cdot \dfrac{I_z}{I_y} = \underbrace{\dfrac{y}{z}}_{\tan\emptyset}$

$\Rightarrow$ • $\tan\emptyset = \dfrac{I_z}{I_y} \cdot \tan\theta$ veya • $\tan\theta = \dfrac{I_y}{I_z} \cdot \tan\emptyset$

- T.E.'ne en uzak noktalarda gerilmeler $+, -$ max - min olur.

- Eğik eğilmenin genel formülü;



$\varepsilon_x = -\dfrac{y}{r}$ idi.

$$\Rightarrow \varepsilon_z = \varepsilon_z^{Mx} + \varepsilon_z^{My} = \left(-\frac{y}{r}\right) + \left(-\frac{x}{r}\right) = \bar{C}_1 y + \bar{C}_2 x$$

olsun.

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z = E\left(\bar{C}_1 y + \bar{C}_2 x\right) = E\bar{C}_1 y + E\bar{C}_2 x$$

$E\bar{C}_1 = C_1$
$E\bar{C}_2 = C_2$ olsun

$$\Rightarrow \sigma_z = C_1 y + C_2 x \; \text{.....} \; (1)$$

$$M_x = \int y \cdot \sigma_z \, dA \qquad M_y = -\int x \cdot \sigma_z \, dA$$

$$\Rightarrow M_x = \int y \left[C_1 y + C_2 x\right] dA \qquad M_y = -\int x \left[C_1 y + C_2 x\right] dA$$

$$= \int \underbrace{C_1 y^2 dA}_{I_x} + \int \underbrace{C_2 x y \, dA}_{I_{xy}} \qquad = \int \underbrace{C_1 x y \, dA}_{I_{xy}} + \int \underbrace{C_2 x^2 dA}_{I_y}$$

→ Eksi My'e olur

$$\Rightarrow M_x = C_1 I_x + C_2 I_{xy} \; \text{.......} \qquad -M_y = C_1 I_{xy} + C_2 I_y \; \text{.....} \; (2)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} M_x \\ -M_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{xy} & I_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

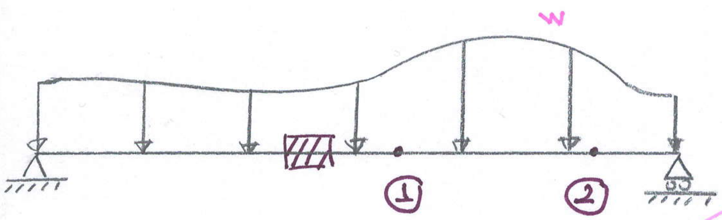
$$C_1 = \frac{M_x I_y + M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$

$$C_2 = \frac{M_y I_x + M_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$

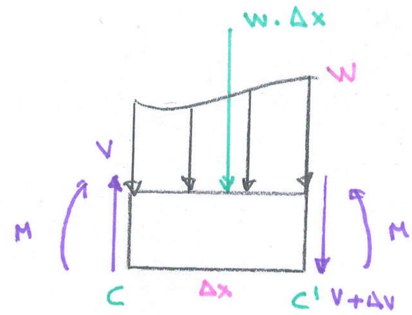
(1) denkleminde yerine konulur

$$\Rightarrow \sigma_z = \frac{M_x I_y + M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \cdot y + \frac{M_y I_x + M_x I_{xy}}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \cdot x$$

Moment Diyagramları



Δx kadar sonsuz küçük bir parça alınırsa.



$\sum F_y = 0$

$\Rightarrow V - (V+\Delta V) - w\,\Delta x = 0$

$\Rightarrow \Delta V = -w\,\Delta x$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta V}{\Delta x} = -w \rightarrow$ Δx'i sıfıra yaklaştırırsak;

$\Rightarrow \dfrac{dV}{dx} = -w \Rightarrow dV = -w\,dx$

1 ve 2 noktaları için;

$$\Rightarrow V_2 - V_1 = \int_{x_1}^{x_2} -w\,dx$$

2 nokta arasındaki yük eğrisinin (kesme değil) altında kalan alan.

Aynı şekil üzerinde;

$\sum M_{C'} = 0 \; (+)$

$\Rightarrow (M+\Delta M) - M - V\Delta x + \dfrac{w\,\Delta x^2}{2} = 0$

$\Rightarrow \Delta M = V.\Delta x - \dfrac{w\,\Delta x^2}{2} \rightarrow$ Her iki taraf Δx'e bölünür ve Δx sıfıra yaklaştırılırsa;

$\Rightarrow \dfrac{dM}{dx} = V \Rightarrow dM = V\,dx$

$$M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} V\,dx$$

2 nokta arasındaki kesme eğrisi altında kalan alan.

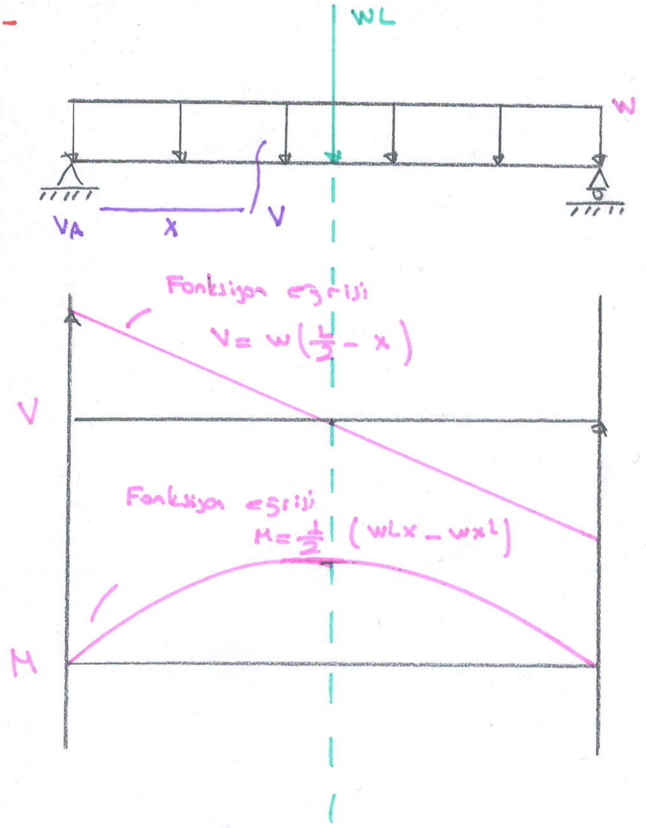
ÖZET

- $V - V_A = \int -w\,dx$
- $M - M_A = \int V\,dx$

V: Belli bir mesafedeki V.

V_A: Mesafeye göre baştaki

$M - M_A$ üstteki gibi.



$\Sigma F_y = 0$ $\quad x$ mesafeli kısım için;

$V_A = V_B = \dfrac{wL}{2}$

Yayılı yük lineer düz

$$V - V_A = -\int_0^x w\,dx = -w\,x$$

$$\Rightarrow V = V_A - wx = \frac{wL}{2} - wx$$

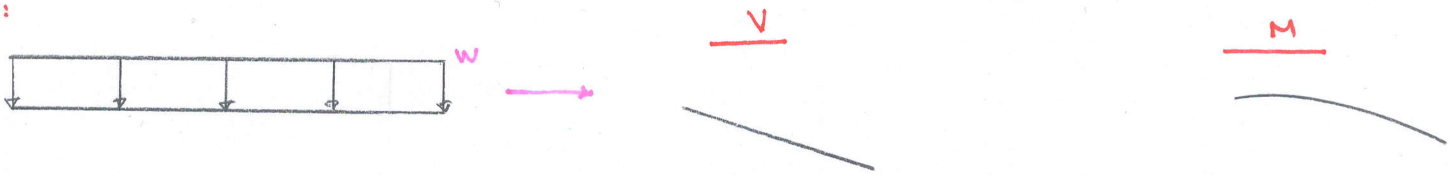
$$\Rightarrow V = w\left(\frac{L}{2} - x\right) \quad \text{fonksiyon}$$

@ $x = \frac{L}{2} \rightarrow V = 0$

$$M - \cancel{M_A}^{\,0} = \int_0^x V\,dx$$

$$\Rightarrow M = \int_0^x w\cdot\left(\frac{L}{2} - x\right)dx = \underbrace{\frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}}_{\text{Parabolik Fonksiyon}}$$

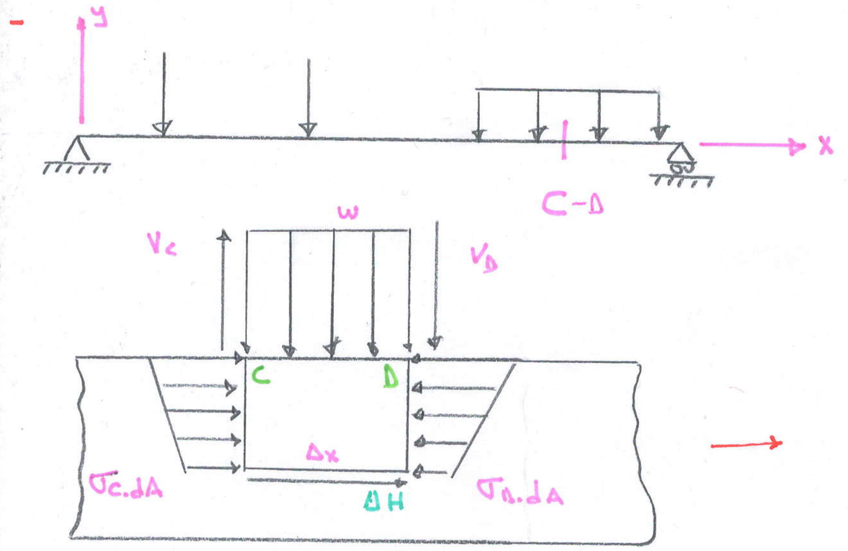
NOT:

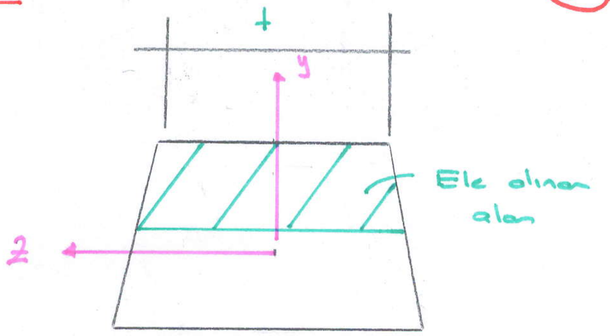
- 

- 

Düz olmasa da eğri çizilir (M, V)

Kayma Akımı – Kayma Gerilmesi – Kesme Kuvveti





$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Rightarrow \Delta H + \sigma_C\, dA - \sigma_D\, dA = 0$$

$$\Rightarrow \Delta H = (\sigma_D - \sigma_C)\, dA$$

$$\Rightarrow \Delta H = \int \left(\frac{M_D\, y}{I_z} - \frac{M_C\, y}{I_z} \right) dA$$

$$\Rightarrow \Delta H = \frac{\overset{V.\Delta x}{\Delta M}}{I} \cdot \underbrace{\int y\, dA}_{Q} \Rightarrow \Delta H = \frac{V\, \Delta x}{I} \cdot Q$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\Delta H}{\Delta x}}_{q\ (N/mm)} = \frac{V.Q}{I} = q$$

→ q kayma akışı, birim uzunluk başına düşen yatay kesme kuvvetidir. (N/mm)

$$\tau^v = \frac{\Delta H}{A} = \Delta H . \frac{1}{A} = \left(\frac{V.Q}{I} . \Delta x \right) . \frac{1}{A} = \frac{V.Q}{I} . \cancel{\Delta x} . \frac{1}{t . \cancel{\Delta x}}$$

$$\Rightarrow \tau^v = \frac{V.Q}{I.t}$$

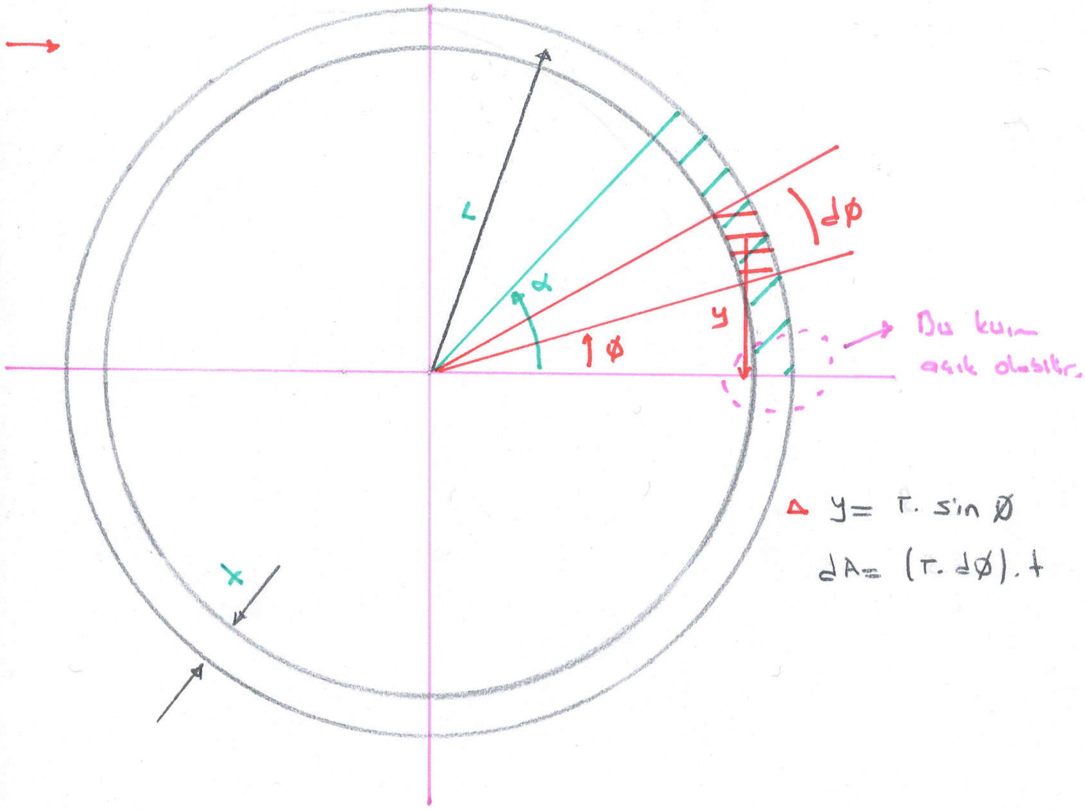
t: Ele alınan yükseklikteki genişlik.

- Parçanın alt kısmındaki alan ele alınırsa orada ise eşit ve zıt yönlü ΔH kesme kuvveti olacaktı ve sonuç değişmeyecekti.

- $\tau^v = \dfrac{V.Q}{I.t}$, üst ve alt yüzeylerde $Q = 0$ olacağı için bu kısımlarda $\tau^v = 0$ olur.

- Bu kısımlara etki eden bir kuvvet yoktur.
- τ_{max} için Q ve t dikkate alınmalıdır.
- Eğer t değişken ise τ_{max} ortada olmayabilir.

– ince cidarlı tüpler ele alınırsa;



$\Delta\ y = r \cdot \sin Ø$

$dA = (r \cdot dØ) \cdot t$

$$Q = \int y \cdot dA$$
$$= \int_0^{\alpha} (r \cdot \sin Ø)(r \cdot dØ) \cdot t$$
$$= \int_0^{\alpha} r^2 t \sin Ø \, dØ$$
$$= -r^2 t \cos Ø \Big|_0^{\alpha}$$
$$= (-r^2 t \cos\alpha) - (-r^2 t \underbrace{\cos 0}_{1})$$
$$\Rightarrow Q = t r^2 (1 - \cos\alpha)$$

$$I = \int y^2 \, dA = \int_0^{2\pi} (r \cdot \sin Ø)^2 (r \cdot dØ \cdot t)$$
$$= \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 Ø \, r t \, dØ$$
$$= r^3 t \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2 Ø}_{\frac{1 - \cos 2Ø}{2}} \, dØ$$
$$= \frac{r^3 t}{2} \left[Ø - \frac{\sin 2Ø}{2} \right] \Big|_0^{2\pi} \Rightarrow I = \pi t r^3$$

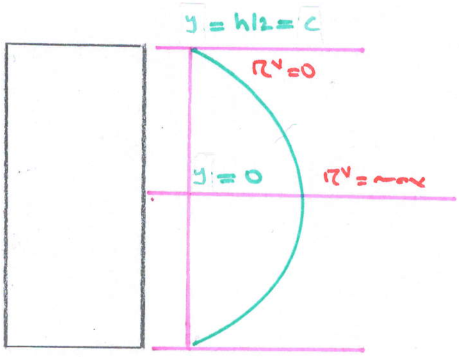
• $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

• $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \sin 2\alpha}{2}$

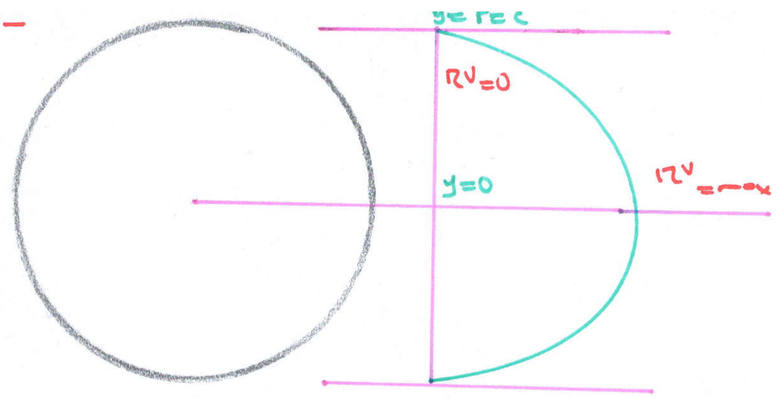
$\Rightarrow\ \tau = \dfrac{V \cdot Q}{I \cdot t} = \dfrac{V \cdot t r^2 (1 - \cos\alpha)}{\pi t r^3 \cdot t}$, $\alpha = 180^0 \Rightarrow \tau = \dfrac{2V}{\pi r t} \cdot \dfrac{2}{2} = \dfrac{4V}{A}$

— o —

–



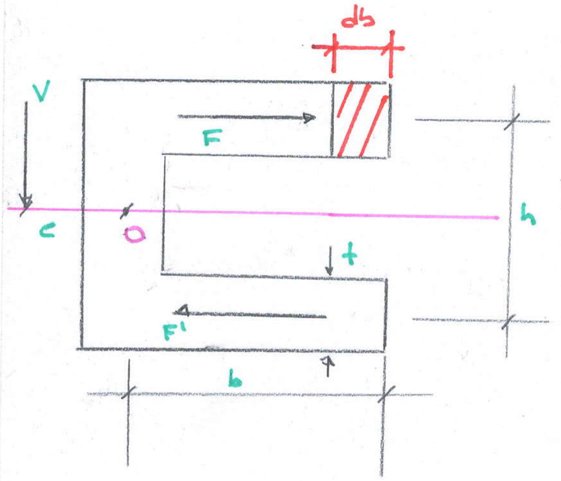
• $\tau^v = \dfrac{3V}{2A} \left[1 - \dfrac{y^2}{c^2} \right]$



$$\tau^V = \frac{4V}{3A}\left[1 - \frac{y^2}{c^2}\right]$$

Kayma Merkezi

- Simetrik olmayan bir parça için, burulma oluşturmadan sadece eğilme oluşturacak kuvvetin uygulama noktasının referans noktasına olan mesafesidir.



$$\Sigma M_O = 0 \quad \uparrow(+)$$

$$V.e = F.h \quad .... \quad (1)$$

$$F = \int \tau . dA \quad , \quad Q = \int y \, dA =$$

$$\Rightarrow Q = \int_0^b \frac{h}{2} . t . db = \frac{htb}{2}$$

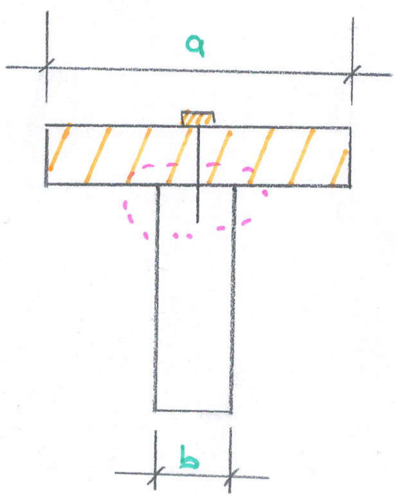
$$\tau = \int_0^b \frac{V.(htb/2)}{I.t} . t \, db = \frac{hb^2t}{4I} . V$$

(1)'de yerine konulursa;

$$\Rightarrow \cancel{V}.e = \frac{hb^2t}{4I} . \cancel{V} . h$$

$$\Rightarrow e = \frac{h^2b^2t}{4I}$$

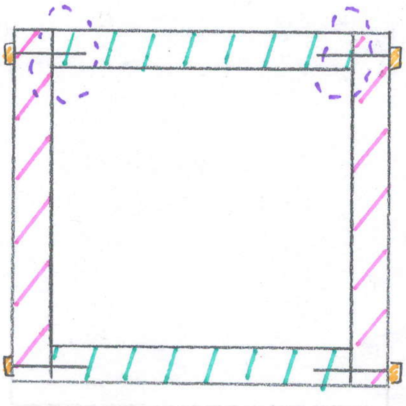
NOT:



→ Bu tarz problemlerde önem teşkil eden yer yuvarlak içine alınan kısımdır.
Dolayısıyla statik moment Q için üstteki alan ve genişlik için ise b uzunluğu dikkate alınır.

$$\rightarrow \tau = \frac{V.Q}{I.b}$$

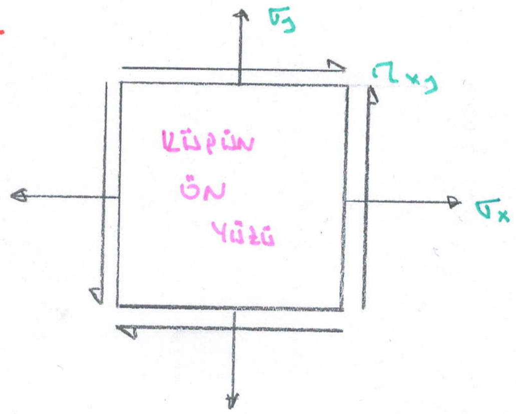
NOT:



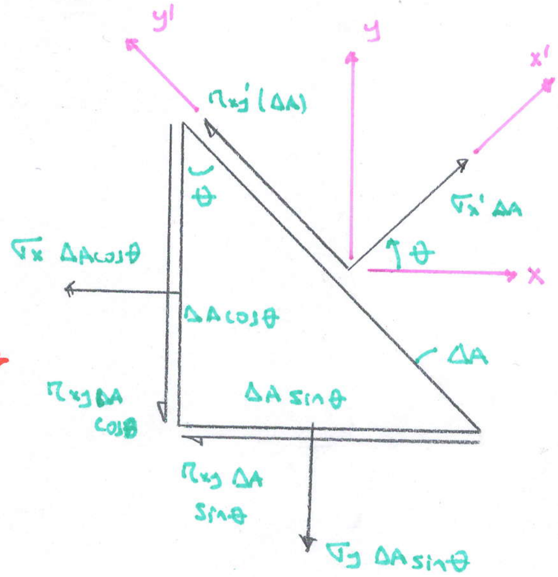
Yuvarlak içine alınan iki kısım için üstteki mavi taralı olan kullanılır ve 9 ikiye bölünür veya alanın yarısı kullanılır.

NOT: Bir cisim statik dengede ise, o cisimden alınan herhangi bir parça da statik dengededir.

Gerilme - Gerinim Dönüşümleri



θ açısı kadar döndürülünce oluşan gerilmeler.



$\Sigma F_{x'} = 0$

$$\Rightarrow \sigma_{x'}\Delta A - \sigma_x(\Delta A\cos\theta)\cdot\cos\theta - \sigma_y(\Delta A\sin\theta)\sin\theta - \tau_{xy}(\Delta A\sin\theta)\cos\theta - \tau_{xy}(\Delta A\cos\theta)\sin\theta = 0 \quad \ldots (1)$$

$\Sigma F_{y'} = 0$

$$\Rightarrow \tau_{x'y'}\Delta A + \sigma_x(\Delta A\cos\theta)\sin\theta - \sigma_y(\Delta A\sin\theta)\cos\theta + \tau_{xy}(\Delta A\sin\theta)\cos\theta - \tau_{xy}(\Delta A\cos\theta)\cos\theta = 0 \quad \ldots (2)$$

(1) ... $\sigma_{x'} = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\cos\theta\sin\theta$

(2) ... $\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y)\cos\theta\sin\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

- $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
- $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
- $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$
- $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

- $\sigma_x' = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$ ... (A)

- $\tau_{xy}' = -\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$

↳ $\theta = 90 + \theta$ y′'nün x ekseni ile yaptığı açı yazılır ve

$\cos(2\theta + 180) = -\cos 2\theta$ $\quad$ $\sin(2\theta + 180) = -\sin 2\theta$ göz önüne alınırsa;

⇒ • $\sigma_y' = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$ ... (B)

(A) + (B)

- $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_x' + \sigma_y'$ ve $\sigma_z = \sigma_z' = 0$ dolayısıyla gerilmelerin toplamı yönelimden bağımsızdır. (Kübik eleman)

Asal Gerilmeler ve Max. Kayma Gerilmesi

– σ_x' ve τ_{xy}' bir çemberin parametrik denklemleridir;

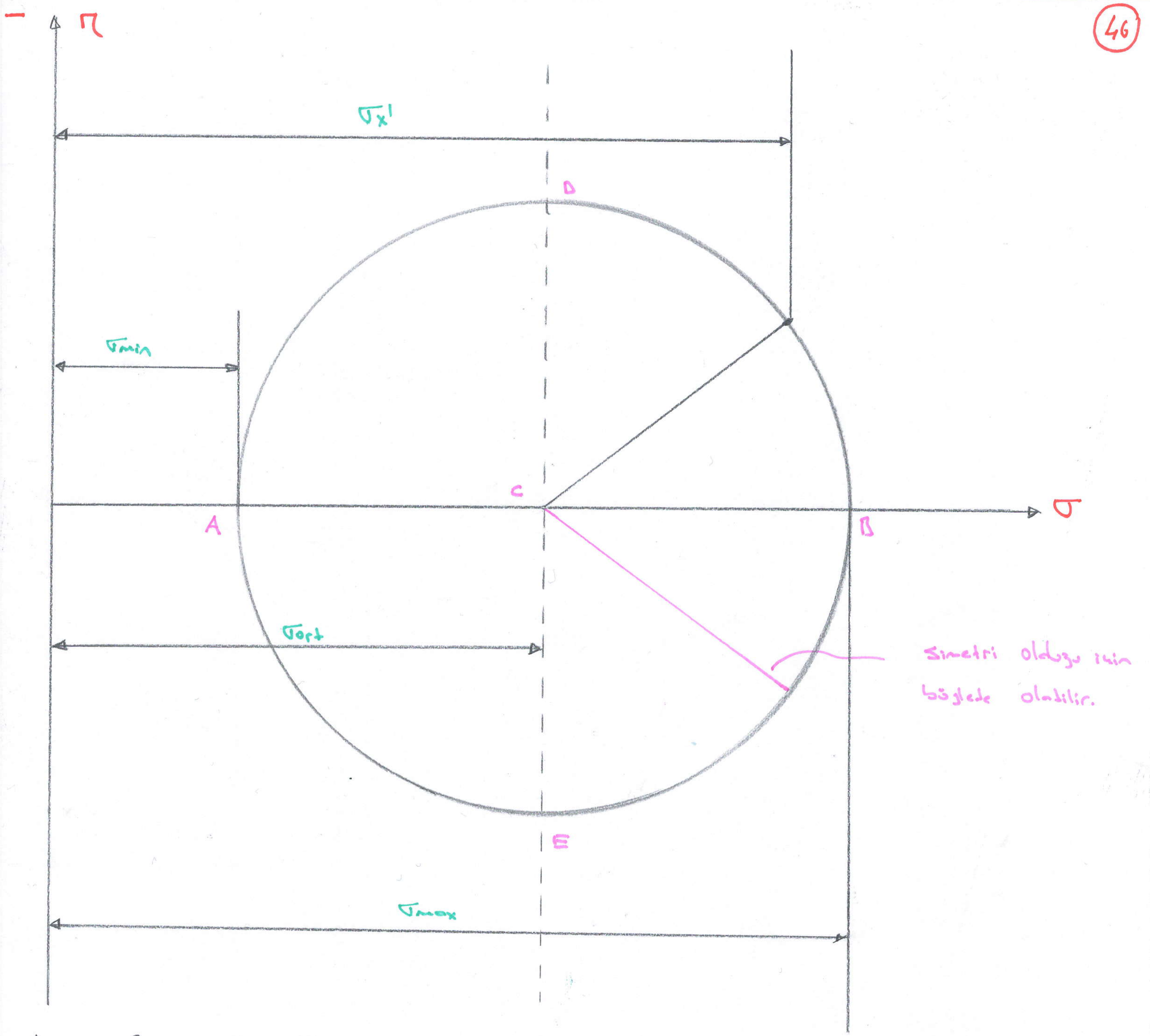
$$\left(\sigma_x' - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cdot\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta\right)^2$$

$$\left(\tau_{xy}'\right)^2 = \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta\right)^2$$

+ → θ yok edilir

$$\left(\sigma_x' - \underbrace{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}}_{\sigma_{ort}}\right)^2 + \tau_{xy}'^2 = \underbrace{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}_{R^2}$$

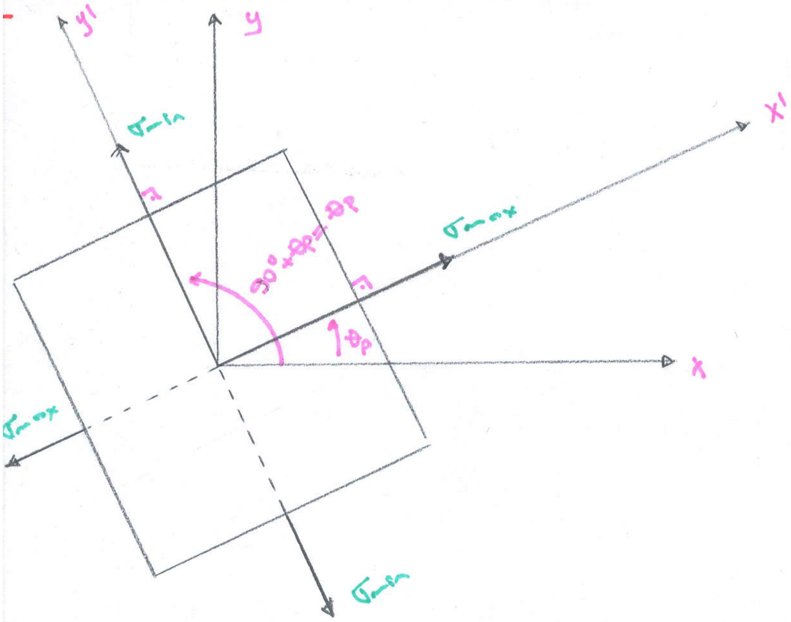
⇒ • $R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ $\quad$ • $\sigma_{ort} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$



- A ve B noktaları σ_x' gerilmesinin min ve max olduğu noktalardır.
- Ayrıca bu noktalarda τ_{xy}' sıfırdır.
- Dolayısıyla A ve B noktalarına karşılık gelen θ_p değeri $\tau_{xy}'=0$ ile bulunur.

$$\longrightarrow \quad \tau_{xy}' = 0 \Rightarrow -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta_p + \tau_{xy}\cos 2\theta_p = 0$$

$$\Rightarrow \bullet \ \tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$



Burodaki gerilmeler asal gerilmelerdir ve gerilmelerin bulunduğu düzleme de asal düzlem denir. Burası A ve B noktalarıdır.

θp açısının bulunması için $\tau_{xy'}=0$ olduğunda bu düzlemde herhangi bir kayma gerilmesi bulunmamaktadır.

Çember üzerinde;

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{max} &= \sigma_{ort} + R \\ \sigma_{min} &= \sigma_{ort} - R\end{aligned}\right| \Rightarrow \bullet\ \sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$ elde edilir.

- Çember üzerinde D ve E noktaları ise τ_{xy}'nin max. olduğu yerlerdir ve buraya karşılık gelen normal gerilmeler σ_{ort}'dır.
- $\tau_{max} = R$ değeridir.

$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

- τ_{max} için gerekliği açıyı bulmak adına;

$$\sigma_{x'} = \underbrace{\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}}_{\sigma_{ort}} + \underbrace{\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta}_{0 \text{ olmalı}}$$

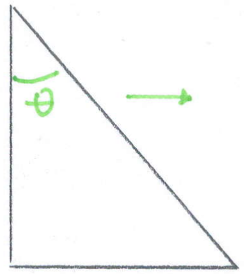
$$\Rightarrow \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \bullet\ \tan 2\theta s = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\cdot\tau_{xy}} \longrightarrow \tan 2\theta s = -\frac{1}{\tan 2\theta p}$$ olduğu görülmektedir.

$$\Rightarrow \bullet\ |\theta s| + |\theta p| = 45 \qquad \bullet\ |2\theta s| + |2\theta p| = 90$$

- * Bu durumda; τ_{max} düzlemi, asal düzlem ile 45°'lik açı yaptığı sonucuna varılır.

Özetle Formüller

- 

θ: buradaki açıdır. Formüller buradaki θ'ya göre hesaplandı.

- $\sigma_{x'} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$

- $\sigma_{y'} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$

- $\tau_{x'y'} = -\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$

- $R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

- $\sigma_{ort} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$

- $\sigma_{max,min} = \sigma_{ort} \pm R = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

- $\tan 2\theta_p = \dfrac{2\cdot\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$

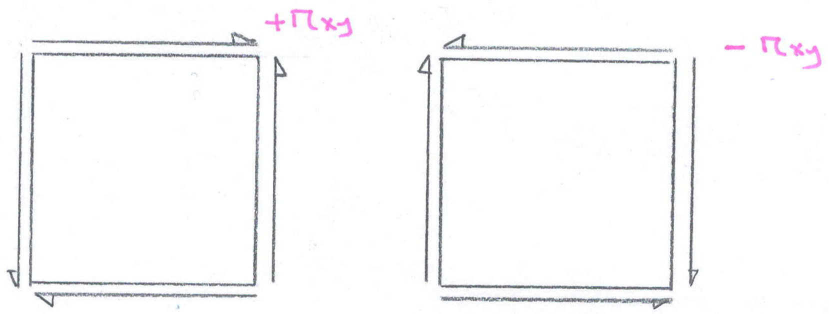
- $\tau_{max,min} = \pm R = \pm\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

- $\tan 2\theta_s = -\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}$

- $|2\theta_p| + |2\theta_s| = 90$

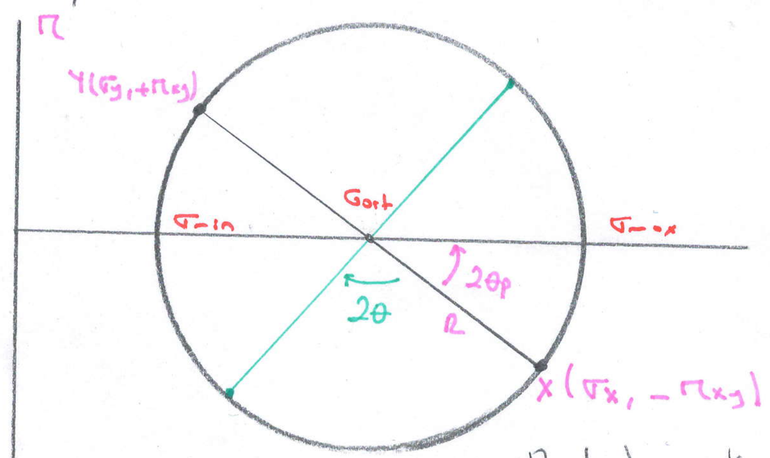
- $|\theta_p| + |\theta_s| = 45$

- θ_p ... 1. ASAL DÜZLEM
- $\theta_p + 90$ ... 2. ASAL DÜZLEM

- 

Mohr Çemberi

- Düzlem gerilmede kullanılan çember Mohr çemberidir ve Otto Mohr tarafından sunulmuştur.

- 

- σ_x ve σ_y'nin +, − oluşuna göre çember sağa ve sola kayar.

- X noktasının max. değere ulaşması için $2\theta_p$ kadar dönmesi gerekir.

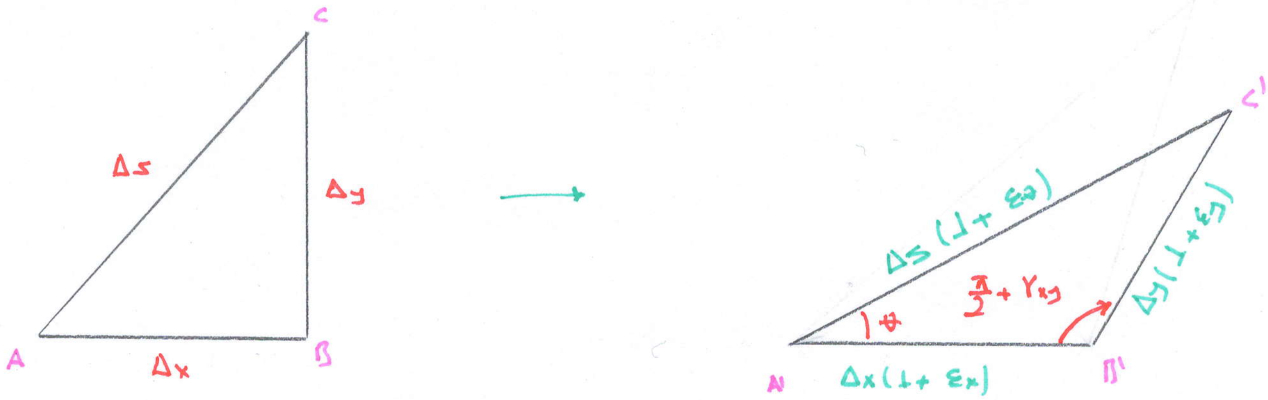
NOT ✱ ✱ ✱ : σ_{ort} gibi tüm σ değerleri orjinden itibarendir.

↳ θ kadar dönen düzlemdeki gerilmeler için Mohr çemberinde 2θ kadar [illegible]

- Max. kayma gerilmeleri asal doğrultularla 45°'lik bir açı yapar.
- Mohr çemberinde bu açı 2 katı olup 90° dir.
- θ_p çember üzerindeki durumu şekillerden farklıdır.
- Çemberde x ekseni üstünde ise şekilde negatif dir.
- Formülde bulunan işaret şekilde kullanılmalı.

Düzlem Şekil Değiştirme Dönüşümleri

-



cos teoreminden;

$$A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2 - 2 \cdot A'B' \cdot B'C' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right), \quad \Delta x = \Delta s \cdot \cos\theta, \quad \Delta y = \Delta s \cdot \sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon(\theta) = \varepsilon_x \cdot \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \cos\theta \sin\theta$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon(0) = \varepsilon_x \\ \varepsilon(90) = \varepsilon_y \end{array}\right| \text{ Denklem kontrolü}$$

- $\theta = 45°$ için;

$$\varepsilon(45) = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy})$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon(45) - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

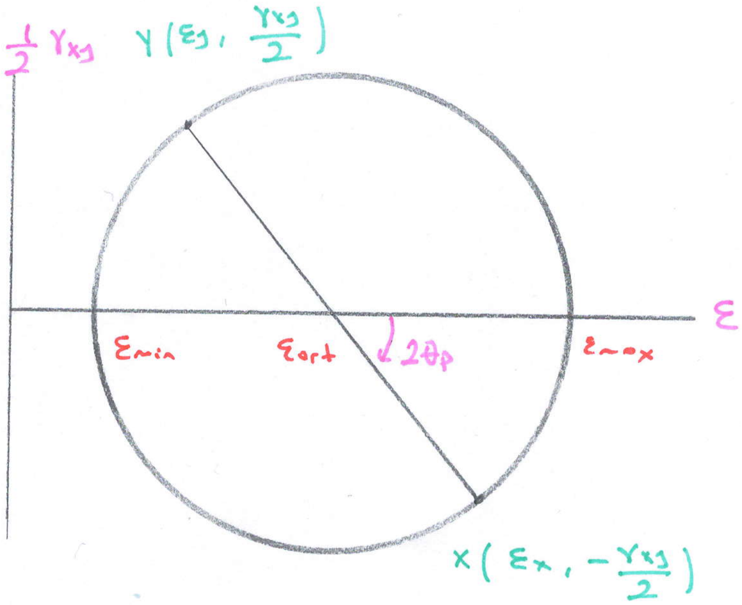
$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

- $\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'}$

- $$\varepsilon_{max,min} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

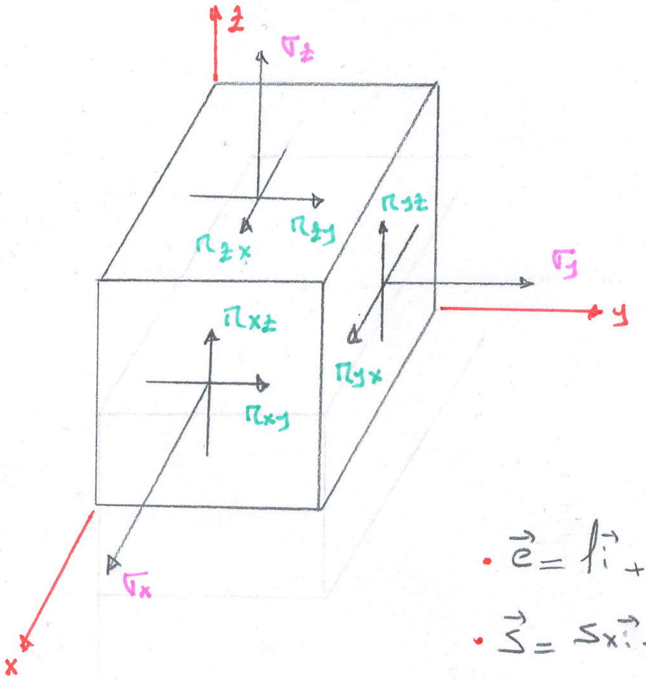
- $$\frac{\gamma_{max,min}}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

- $$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$



3 BOYUTLU GERİLME HALİ

- Düzlem için σ_x, σ_y ve τ_{xy} olmak üzere 3 adet gerilme vardır.
- Fakat 3 boyutlu hal için 6 adet gerilme vardır.
- Bunlar σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz} ve τ_{yz} 'dir.
-



$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} l \\ m \\ n \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{vmatrix}$$

GERİLME TENSÖRÜ — NORMALİN DOĞRULTMAN KOSİNÜSLERİ — GERİLME BİLEŞENLERİ

- $\vec{e} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$
- $\vec{S} = S_x\vec{i} + S_y\vec{j} + S_z\vec{k}$
- $\sigma_N = \vec{S} \cdot \vec{e}$
- $S^2 = \sigma_N^2 + \tau^2$
- $S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$

- $l = \cos\theta_x$
- $m = \cos\theta_y$
- $n = \cos\theta_z$
- $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

$\tau_{x\,y}$

x ↳ Normali

y ↳ Doğrultu

- Ekstrem gerilmeler olan asal gerilmeleri bulmak için;

→
$$\begin{vmatrix} (\sigma_x-\sigma_i) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y-\sigma_i) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z-\sigma_i) \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} l \\ m \\ n \end{Vmatrix} = 0$$

- σ_i hepsinde aynıdır.
- σ_i herhangi bir asal gerilmeyi temsil eder. (σ_1, σ_2 ve σ_3)

- l, m ve n olan doğrultman kosinüsleri sıfır olamaz.
- Bu yüzden matrisin determinantı sıfır olur.
- Matrisin determinantı;

→ $+\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$, $I_1 - I_2 - I_3$: Gerilme invaryantları

- $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ (MPa)
- $I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$ (MPa^2)
- $I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - (\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{xz}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2)$ (MPa^3)

- Denklemin kökleri asal gerilmeleri verir.
- Doğrultman kosinüsleri bulmak için;

→

1. YOL

- $a_i =$ Minör $+ (\sigma_x - \sigma_i)$

$b_i =$ Minör $- (\tau_{xy})$

$c_i =$ Minör $+ (\tau_{xz})$

↳ Determinant

$$k_i = \frac{1}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2}}$$

$l_i = a_i k_i$ $m_i = b_i k_i$ $n_i = c_i k_i$

2. YOL

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x-\sigma_i)\,l_i + \tau_{xy}\,m_i + \tau_{xz}\,n_i &= 0 \\ \tau_{xy}\,l_i + (\sigma_y-\sigma_i)\,m_i + \tau_{xz}\,n_i &= 0 \\ \tau_{zx}\,l_i + \tau_{zy}\,m_i + (\sigma_z-\sigma_i)\,n_i &= 0 \end{aligned}\right\} (1)$$

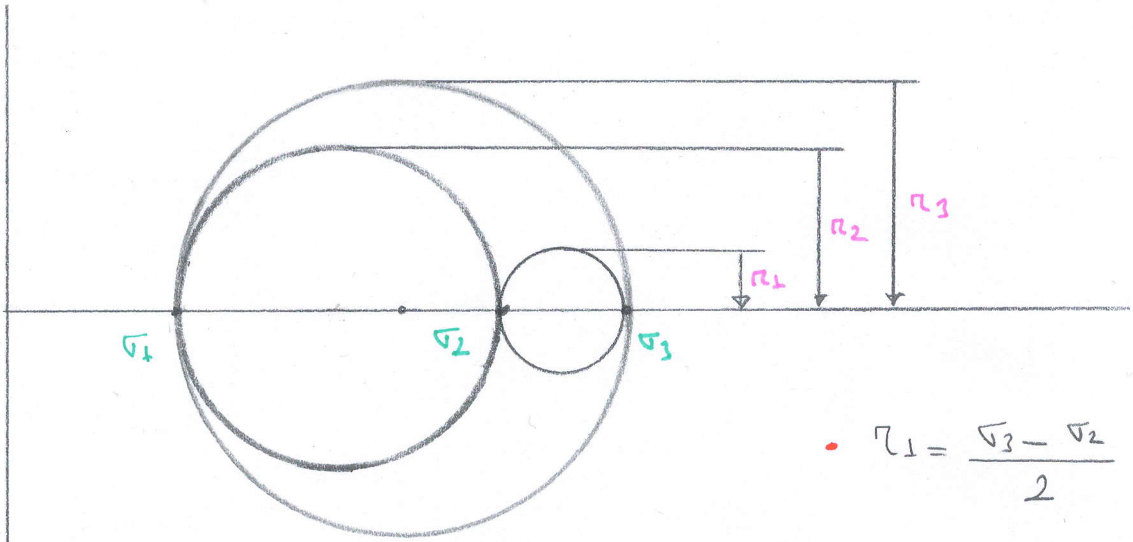
$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 0$ } (2)

(1) – (2) → l_i, m_i ve n_i bulunur.

↳ l_i, m_i ve n_i'deki i σ_i'deki i'dir. i, j ve k'daki i değil.

3 Boyutlu Gerilmede Max. Kayma Gerilmesi

-

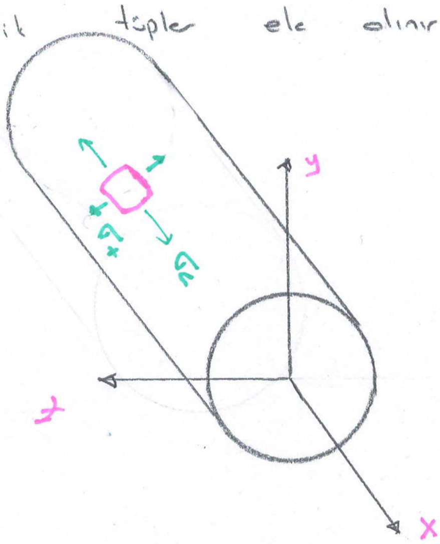


NOT: Daireler yarım çizilebilir.

- $\tau_1 = \dfrac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}$
- $\tau_2 = \dfrac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$
- $\tau_3 = \dfrac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$

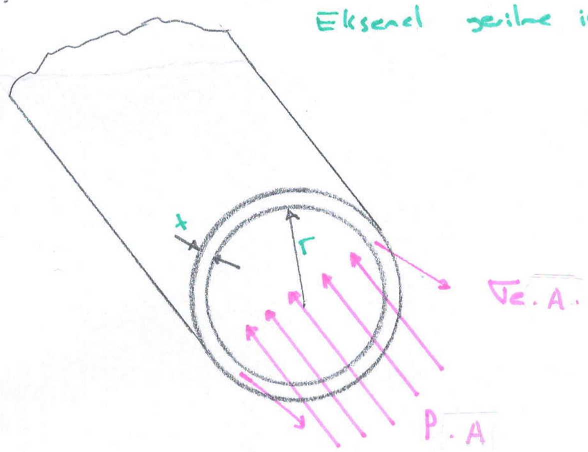
İnce Cidarlı Basınçlı Tüpler

- Genel olarak iki tiptir ve silindirik ile küresel tüplerdir.
- Simetriden dolayı basınç etkisi ile kayma gerilmesi oluşmaz.
- Silindirik tüpler ele alınırsa;



- Basınç etkisi ile 2 tip gerilme oluşur.
- Bunlar eksenel ve teğetsel gerilmelerdir.

Eksenel gerilme için;



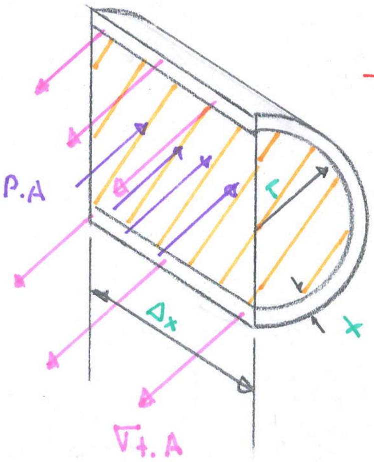
$\Rightarrow \sum F_x = 0$

$\Rightarrow \sigma_e . A - P . A = 0$

$\sigma_e (2\pi r\, t) - P(\pi r^2) = 0$

$\Rightarrow \sigma_e = \dfrac{P . D_o}{4t}$

- Teğetsel gerilme için;



$$\Sigma F_z = 0$$

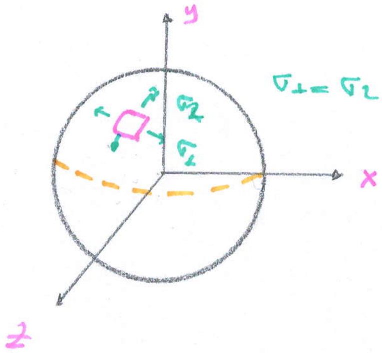
$\Rightarrow 2.\sigma_t A - PA = 0$

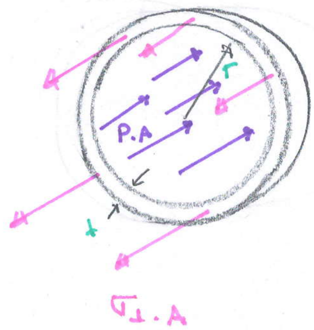
$\Rightarrow 2.\sigma_t.(\Delta x.t) - P.(\Delta x.2r) = 0$

$\Rightarrow$ • $\sigma_t = \dfrac{PD_0}{2t} = 2.\sigma_e$

↳ Teğetsel gerilme eksenel gerilmenin iki katıdır. Tüpler (silindirik) patladığında boyda yırtılır.

- Küre tüpler ele alınırsa;





$\Rightarrow \Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow \sigma_1.A - P.A = 0$

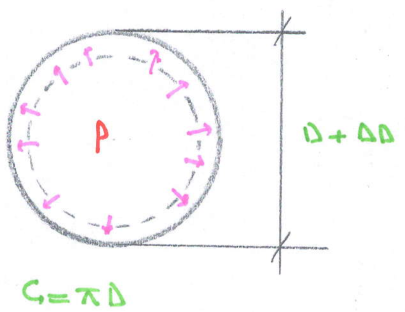
$\Rightarrow \sigma_1.(2\pi r.t) - P.(\pi r^2) = 0$

$\Rightarrow$ • $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_e = \dfrac{P.D_0}{4t}$

- Silindir için 45° 'de $\tau_{max} = \sigma_e$ olur.
- Küre için 45° 'de $\tau_{max} = \sigma_e/2$ olur.

Basınçlı Tüplerde Cidardaki Değişim

-



$\varepsilon_t = \dfrac{\Delta Ç}{Ç} = \dfrac{[\pi(D+\Delta D)] - \pi D}{\pi D} = \dfrac{\Delta D}{D}$

$\varepsilon_t = \dfrac{\sigma_t}{E} \Rightarrow \dfrac{\Delta D}{D} = \dfrac{\sigma_t}{E} = \dfrac{PD}{2tE}$

iç BASINÇ → (+)
DIŞ BASINÇ → (−)

$\Rightarrow$ • $\Delta D = \dfrac{PD^2}{E2t}$ veya • $\Delta D = \dfrac{PD}{2t} \cdot \dfrac{D}{E}$

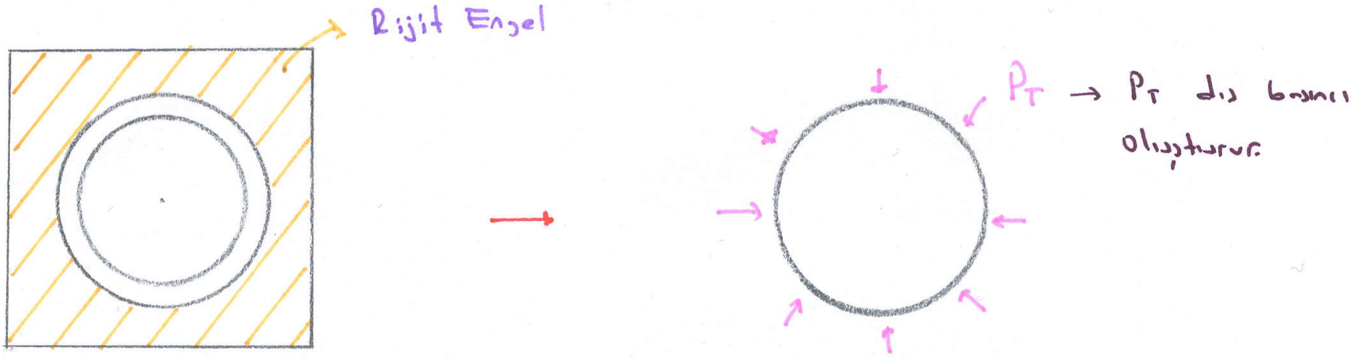
- Isıtma ve basınç olursa;

$$\Delta D = \pm \alpha \Delta T D \pm \frac{PD^2}{2Et}$$

(+) Isıtma — (+) İç basınç

(−) Soğutma — (−) Dış basınç

EĞER;



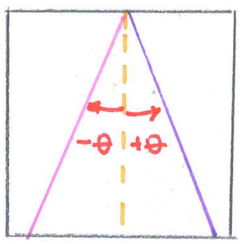
Tüp ısıtılırsa

$$\Rightarrow \Delta D = \alpha \Delta T D - \frac{P_T \cdot D^2}{2Et} = 0$$

$$\Rightarrow P_T = \frac{2E\alpha t}{D} \Delta T$$

$$\sigma_t = \frac{PD}{2t} = \frac{2E\alpha t D}{D 2t} \cdot \Delta T = \alpha \Delta T E$$

NOT: Gerilme dönüşüm sorularında;



AKMA KRİTERLERİ

- Çekme testinde tek eksenli bir yük uygulanır.
- Ama gerçekte malzemeye etkiyen yükler sonucu farklı yönlerde de gerilmeler oluşur.
- Bu gerilmeler çekme testinde elde ettiğimiz σ_y akma mukavemeti ile kıyaslayabilmek için kriterler geliştirilmiştir.

□ Sünek Malzemeler için

△ Max. Kayma Gerilmesi Kriteri (TRESCA)

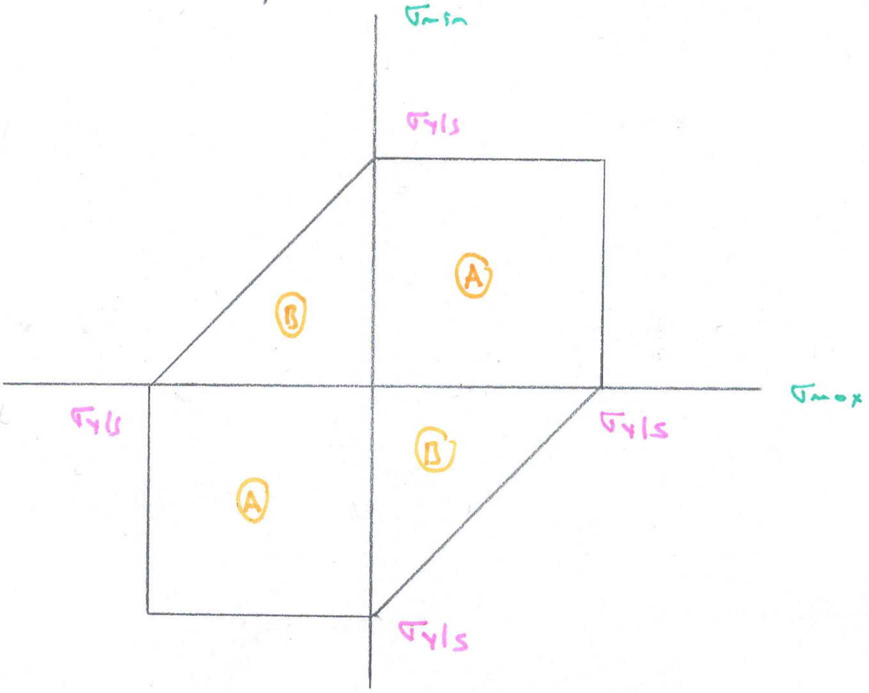
- Akma kayma gerilmelerinden dolayı oluşur.
- Henri Edouard Tresca
-

• σ_1, σ_2 ve σ_3 → Asal Gerilmeler $\sigma_1 = \sigma_{max}$, $\sigma_3 = \sigma_{min}$ ⇒ $\sigma_M = \sigma_1 - \sigma_3$

⇒ • $\tau_M = \dfrac{\sigma_M}{2} = \dfrac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$, • $\sigma_{em} = \dfrac{\sigma_Y}{S}$ • $\tau_{em} = \dfrac{\sigma_{em}}{2}$

• $\tau_M \leq \tau_{em}$

- Tresca altıgeni;



Ⓐ → $\sigma_{max} - \sigma_{min}$ işaretler aynı

Ⓑ → $\sigma_{max} - \sigma_{min}$ işaretler farklı

△ Biçim Değiştirme Enerjisi – Max. Distorsiyon Enerjisi Kriteri (Von-Mises)

- Richard Von Mises
-

Şekil Değişimi = Hacim Değişimi + Biçim Değişimi

Beltrami Von Mises

- Elemanda birim hacme düşen distorsiyon enerjisinin maksimum değeri, aynı malzemeden yapılmış bir çekme test numunesinde akmaya sebep olacak birim hacme düşen distorsiyon enerjisinden daha düşük ise malzeme güvenlidir.
- Özetle; cismin kuvvetler altında oluşan biçim değiştirme enerjisi, rezilyans bölgesinde kalmalı.
- Bu kriterde hidrostatik basınç altında bir küp göz önüne alınır ve hacim değişimi sıfır olur. Bu yüzden biçim değişimi göz önüne alınır.

- Toplam biçim değiştirme enerjisi;

$$U_B = \frac{1}{6G}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)\right]$$

G: Rijitlik Modülü
Kayma Modülü

- σ_1 çekme ekseni doğrultusunda olacak şekilde ele alınırsa; çekme testinin başlangıç (akma) anında $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ve $\sigma_1 = \sigma_Y$ olacaktır.
- Dolayısıyla;

$$U_B \leq U_Y, \quad U_Y = \frac{1}{6G}\left[\overset{\sigma_Y^2}{\sigma_1^2} + \overset{0}{\sigma_2^2} + \overset{0}{\sigma_3^2} - (\overset{0}{\sigma_1\sigma_2} + \overset{0}{\sigma_1\sigma_3} + \overset{0}{\sigma_2\sigma_3})\right] = \frac{\sigma_Y^2}{6G}$$

$$U_B \leq U_Y \Rightarrow \frac{1}{\cancel{6G}}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)\right] = \frac{\sigma_Y^2}{\cancel{6G}}$$

$$\Rightarrow \bullet\ \sigma_Y^2 = \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)\right] \ldots \text{(A)}$$

veya

$$\bullet\ \sigma_Y^2 = \frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right]$$

- Kayma gerilmeleri de olursa;

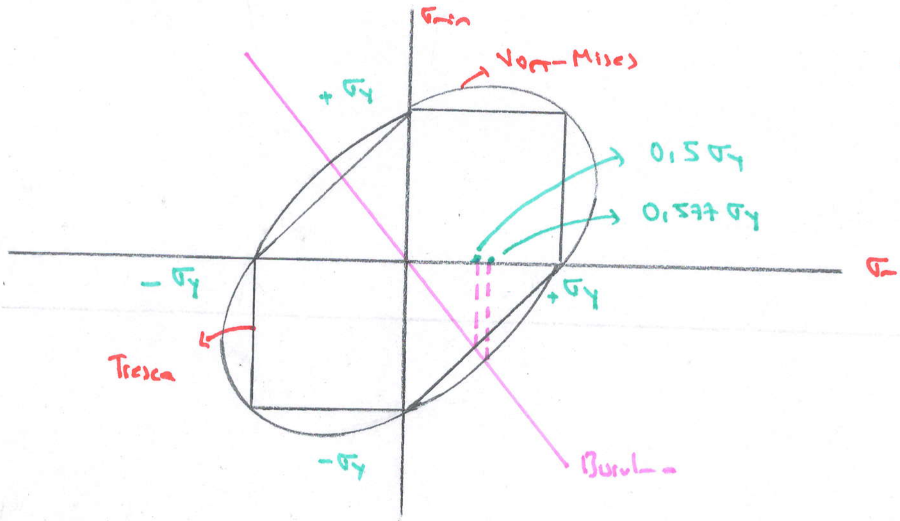
$$\bullet\ \sigma_Y^2 = \frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2)\right]$$

- 2 boyutlu düzlem hali için;

(A) denkleminde;

$\sigma_3 = 0$

$\Rightarrow \bullet\ \sigma_Y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 \rightarrow$ Elde edilen bir elips denklemidir ve;



→ Tablolarda τ_Y/σ_Y oranları 0,55 ve 0,60 arasındadır. Malzemenin kayma gerilmesi için sınırı Tresca'da iken 0,5 σ_Y ve Von Mises'de iken 0,577σ_Y'dir. Bu da Von Mises kriterinin daha hassas olduğunu gösterir.

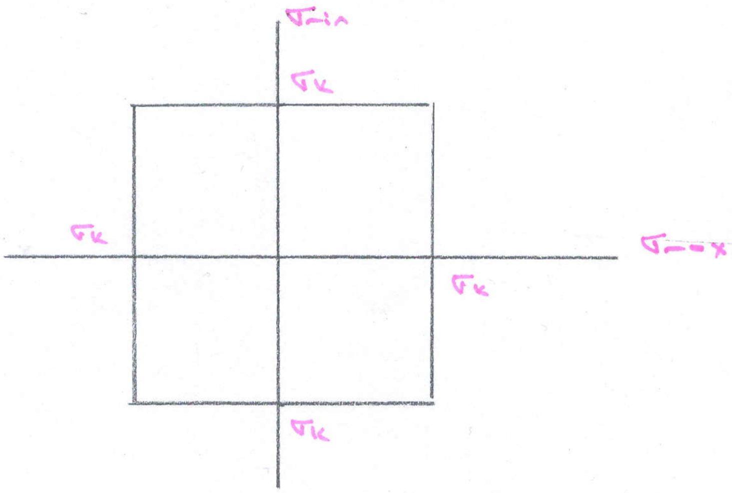
□ Gevrek Malzemeler İçin

Δ Max. Normal Gerilme Kriteri (Rankine)

- σ_1, σ_2 ve σ_3 asal gerilmeler.
- $\sigma_1 = \sigma_{max}$ olsun.

→ $\sigma_1 \leq \sigma_{em}$, $\sigma_{em} = \dfrac{\sigma_K}{S}$ " kopma

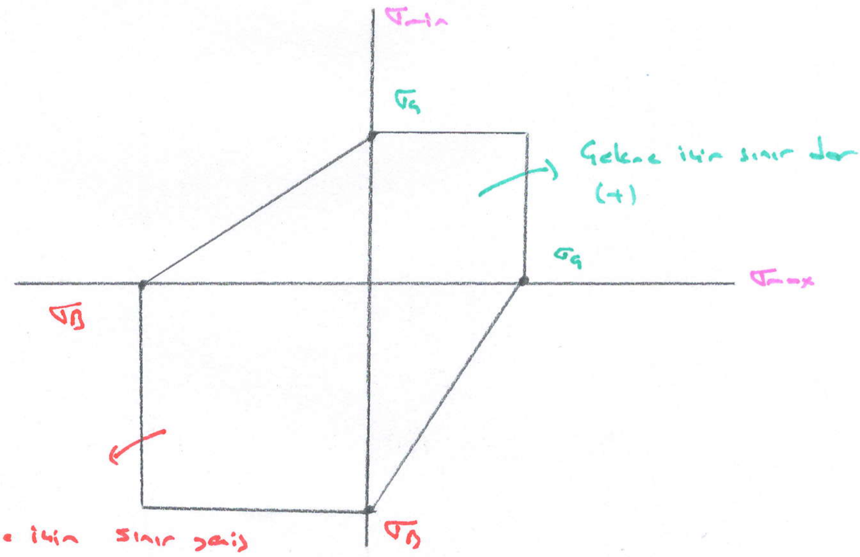
- Ferdinand P. Beer kitabına göre bu kriter Coulomb kriteri.
- Bu kriter eksiktir zira kopma mukavemeti bu kritere göre çekmede ve basmada aynı kabul edilmesidir.
- Çekmede gevrek malzemelerin içindeki çatlak ve boşluklar malzemenin hemen kopmasına neden olur.
- Gevrek malzemeler basınca daha dayanıklıdır.
-



Δ Mohr – Coulomb Kriteri

- Bu kritere göre malzemenin kırılması, max. kopma gerilmesine ve iç sürtünme kuvvetlerine bağlıdır.
-

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{Çekme}} - \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{Basma}} = 1$$



Basma için sınır değer
(−)

- Ayrıca bazı kriterler söylediri;

∘ Max. Gerinim Kriteri (Saint Venant)

- Burada baz alınan gerinimdir.
- Tam akma anı için;

→ $$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

⇒ Düzlem Hali $\sigma_3 = 0$

↳ $\varepsilon_y E = \sigma_1 - \nu\sigma_2$

⇒ $\sigma_y = \sigma_1 - \nu\sigma_2$

⇒ • $\sigma_{max} - \nu\sigma_{min} \leq \sigma_{em}$

3 Eksenli $\sigma_3 \neq 0$

↳ $\underbrace{\sigma_1}_{Max} - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{em}$

∘ Max. Kayma Gerinimi Teoremi

- Kayma açısı baz alınır;

→ • $$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

∘ Toplam Şekil Değiştirme Kriteri (Beltrami)

- $$\underbrace{\text{Şekil Değişimi}}_{\text{Beltrami}} = \underbrace{\text{Hacim Değişimi}}_{\text{Eşit kesenler kip}} + \underbrace{\text{Biçim Değişimi}}_{\text{Von Mises}}$$

Çarpılan kip

- $$U_s = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)\right]$$

U_y → $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

$\sigma_1 = \sigma_y$ ⇒ $U_y = \dfrac{\sigma_y^2}{2E}$

$U_s \leq U_y$

⇒ • $\sigma_y^2 = \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)\right]$

↳ Düzlem hali için $\sigma_3 = 0$ dır ve elips elde edilir.

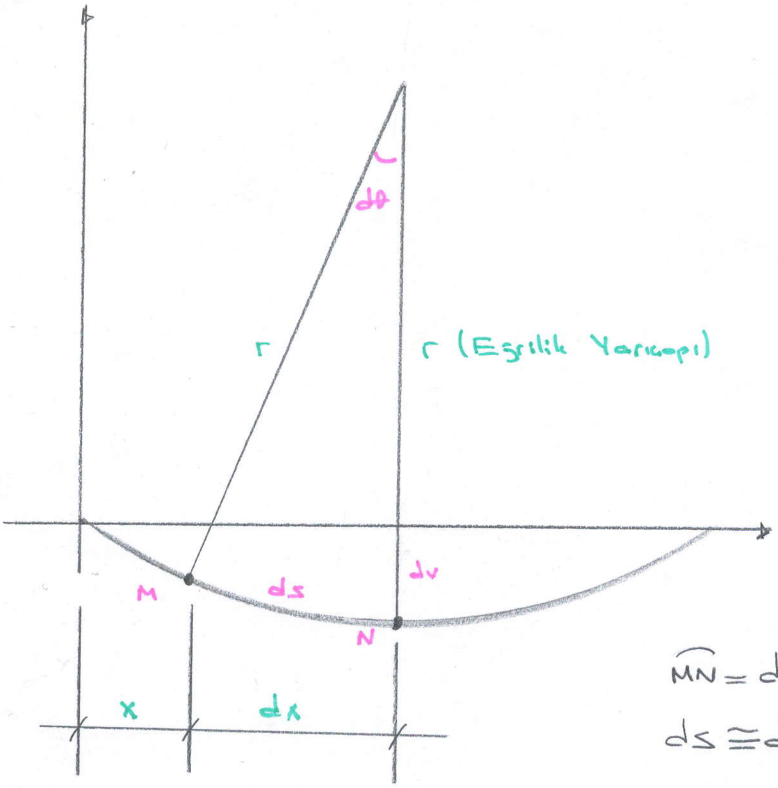
EĞİM – SEHİM

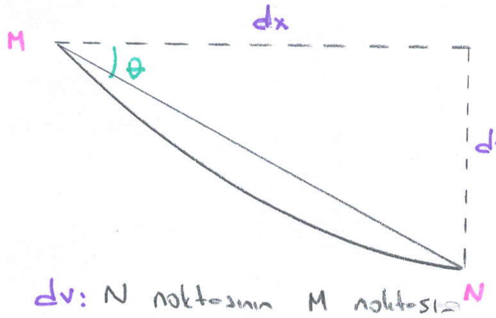
- Basit eğilmeden bilindiği üzere eğrilik;

→ • $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

- Eğim ve sehim için elastik eğri denklemi;

→





dv: N noktasının M noktasına göre sehimi.

• $\tan\theta = \frac{dv}{dx} \cong \theta$

$\widehat{MN} = ds = r\,d\theta$

$ds \cong dx$

⇒ $\frac{ds}{ds} = \frac{r\,d\theta}{ds}$ ⇒ $1 = r\frac{d\theta}{ds}$

⇒ $\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} = K$ EĞRİLİK

$(ds \cong dx)$

⇒ $K = \frac{1}{r} = \frac{d\theta}{dx}$ ... (A)

• $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$ ... (B)

⇒ $\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$ → (A) – (B) , $\theta = \frac{dv}{dx} \xrightarrow{\text{Türev}} \underbrace{\frac{d\theta}{dx}}_{\frac{M}{EI}} = \frac{d^2v}{dx^2}$

⇒ • $\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{M}{EI}$

Elastik Eğri Denklemi

$\int$ → Eğim

$\int\int$ → Sehim

EI: Eğilme rijitliği

- Elastik eğri denklemi bir diferansiyel denklemdir ve bir kaç metod ile çözülür;
  - Analitik metod,
  - Moment alanları, eşlenik çubuklar,
  - Enerji metodları,
  - Clebesh tekli fonksiyonları ile,
  - Nümerik metodlar,
  - Eksen takımına göre $\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ yazılabilir.
- Elastik eğri denklemi kullanılırken, farklı moment bölgeleri için ayrı ayrı elastik eğri denklemi çıkarılır.
- Max. sehimde eğim sıfır olur yani max. sehimi bulmak için eğimi sıfıra eşitleriz.
-

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (V=y)$$

↳ x'e göre türev → $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{EI}\frac{dM}{dx} = \frac{V}{EI}$

↳ x'e göre türev → $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{EI}\frac{dV}{dx} = \frac{-W}{EI}$ (Yayılı Yük)

- Eğer $w = W_0 \sin(\pi x/L)$ gibi bir fonksiyon ise;

→ $\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{W_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{EI}$ yazılır ve $\frac{d^2y}{dx^2}$'ye kadar integre edilir.

BURKULMA

- Kendi ağırlıklarına ve eksenel yüke maruz elemanlara kolon denir ve ince-kalın olarak ikiye ayrılır.
- İnce kolonlara (çubuklara) eksenel yük etkidiğinde yanal bükülme yani eğilme meydana gelir.
- Bu duruma burkulma denir.
-
  - $\sigma_{kr} < \sigma_Y$ → ince kolon
  - $\sigma_{kr} \geq \sigma_Y$ → kalın kolon

σ_Y: Akma gerilmesi

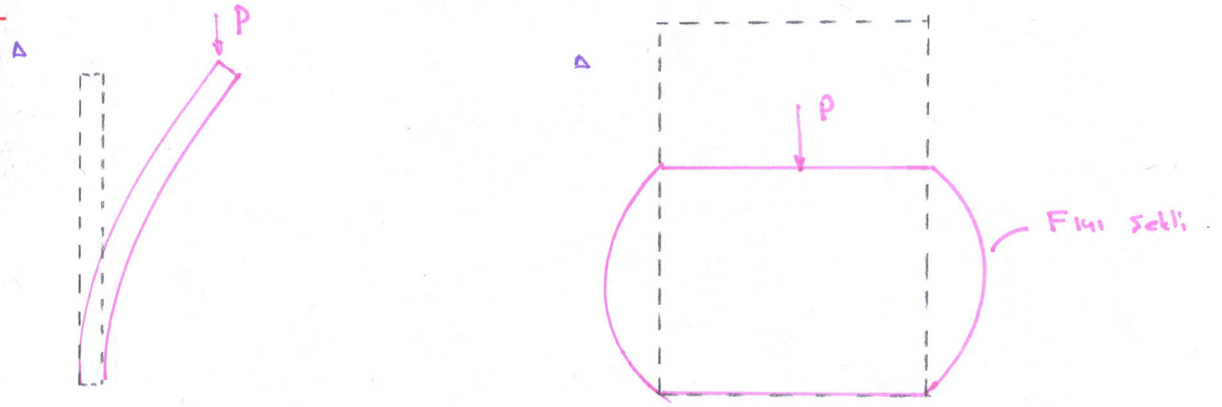
σ_{kr}: Burkulma sonucu oluşan gerilme

→

- $\sigma_{kr} - \sigma_y$ arasındaki eşitsizlik şunu söylemektedir; Malzemeye etki eden σ_{kr} malzemenin σ_y değerine ulaşmadan malzeme burkulur.

- Bu malzemeler ince kolonlardır.

- Kalın kolonlarda ise; kolon stabilizesini korur ve σ_{kr} değeri σ_y'ye ulaştıktan sonra kolon ezilir.



$\sigma_{kr} < \sigma_y$

$\lambda_{kr} < \lambda$

ince kolon

$\sigma_{kr} \geq \sigma_y$

$\lambda_{kr} \geq \lambda$

Kalın kolon

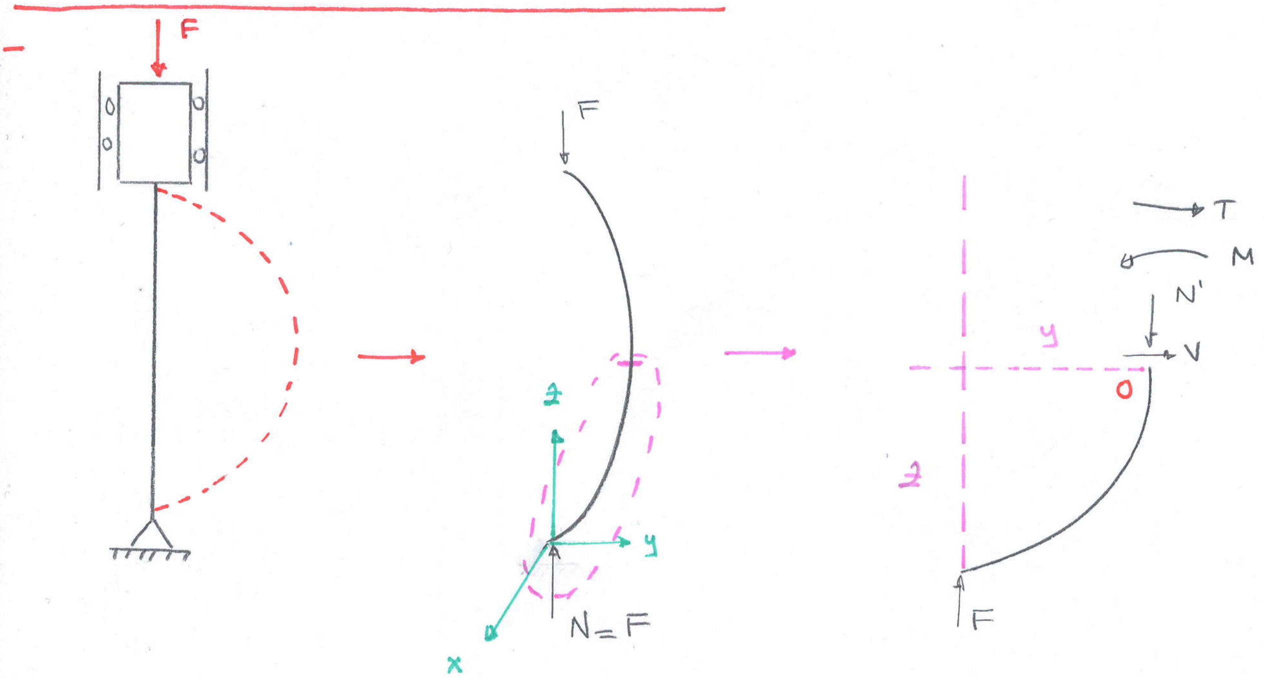
λ: Narinlik oranı

λ_{kr}: Kritik narinlik oranı

- Kolonları ayrıca narinlik oranı ile de tespit etmek mümkündür.

Euler Burkulma Formülü

□ A Kılavuz Mafsal – B Sabit Mafsal



$\Rightarrow \sum M_O = 0 \circlearrowleft (+)$

$-F.y + M = 0$

$\Rightarrow M = F.y$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d^2y}{dz^2}}_{y''} = -\frac{M}{EI} = -\underbrace{\frac{F}{EI}}_{k^2}\cdot y \Rightarrow y'' = -k^2 y$$

$$\Rightarrow y'' + k^2 y = 0$$

$y'' + k^2 y = 0 \Rightarrow y(D^2 + k^2) = 0$

2. mertebeden homojen dif. denklem

$\Rightarrow D^2 + k^2 = 0$

$\Rightarrow D = \pm\sqrt{-k^2}$, $i^2 = -1$

$\Rightarrow D = \pm ik$

$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

$\rightarrow y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$

$\Rightarrow \alpha = 0$
$\beta = k$
$x = z$
$y = y$

$\Rightarrow y = c_1 \cdot \cos kz + c_2 \sin kz$

$z = 0$, $y = 0$ $\quad$ $z = L$, $y = 0$

$\Rightarrow z = 0$ at $y \Rightarrow 0 = c_1 \cdot \cos 0 + c_2 \cdot \sin 0$

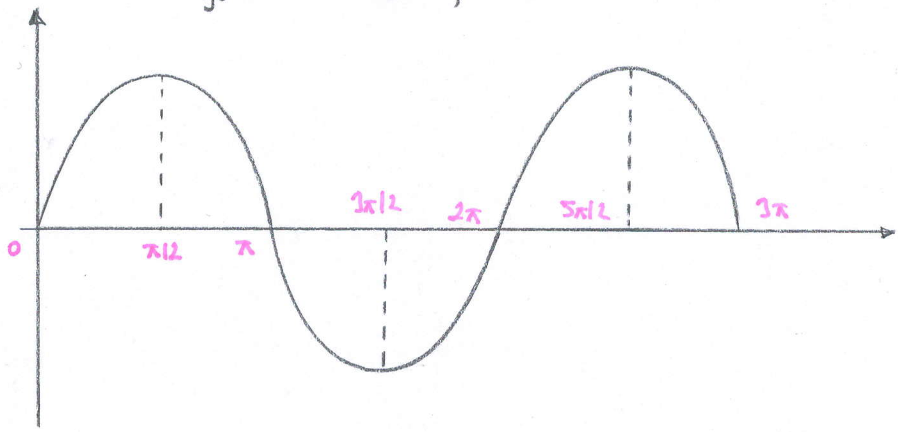
$\Rightarrow c_1 = 0$

$\hookrightarrow y = c_2 \cdot \sin kz$

$\Rightarrow z = L$ at $y \Rightarrow 0 = c_2 \cdot \sin kL$

$\hookrightarrow$ c_2 ve $k.L$ sıfır olamaz. Dolayısıyla $\sin(kL) = 0$ olmalı.

$\Rightarrow$ Sin fonksiyonu incelenirse;



$\Rightarrow \sin(n.\pi) = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$\Rightarrow \sin(kL) = \sin(n\pi)$

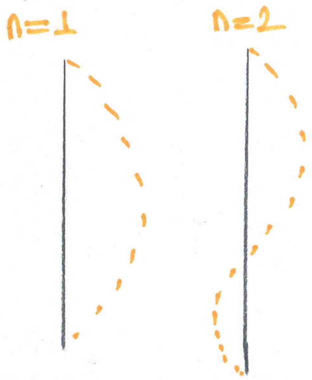
$\Rightarrow k.L = n.\pi$

$\rightarrow k^2 = \dfrac{F}{EI} \Rightarrow k = \sqrt{\dfrac{F}{EI}}$

$k.L = n.\pi \Rightarrow \sqrt{\dfrac{F}{EI}} \cdot L = n.\pi$

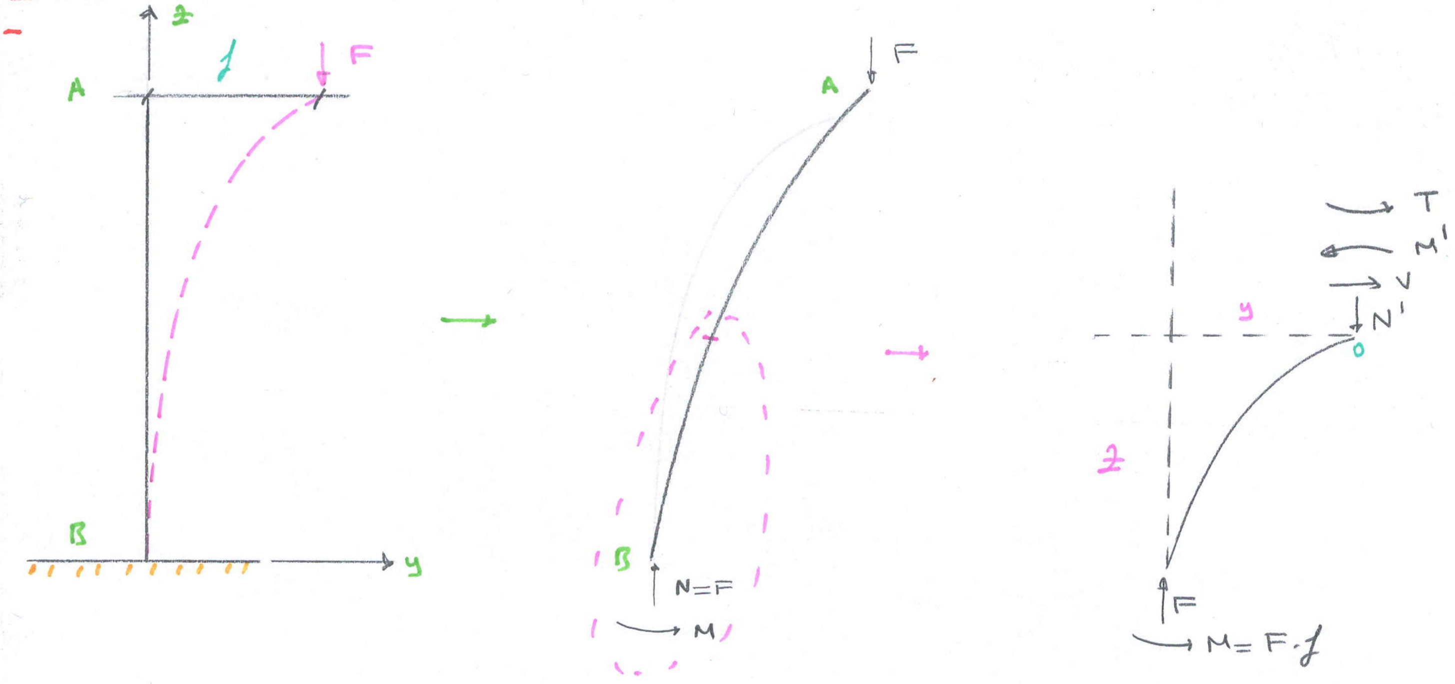
$$\Rightarrow F_{kr} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} EI$$, n: Burkulma modülü

Euler Burkulma Formülü



- Kolonun mesnetlerinin küresel mafsal olması halinde, Min. atalet momenti göz önüne alınarak kritik burkulma hesabı yapılmalı.

□ A Serbest – B Ankastre



$\sum M_B = 0$ ↺ (+)

$\Rightarrow M - F\delta = 0$

$\Rightarrow M = F\cdot\delta$

$\Rightarrow \sum M_O = 0$ ↺ (+)

$\Rightarrow -F\cdot y + M + M' = 0$

$\Rightarrow M' = Fy - M = Fy - F\delta$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{[Fy - F\cdot\delta]}{EI}$$

$$\Rightarrow y'' = -\underbrace{\frac{F}{EI}}_{k^2}\, y \;\underset{=}{+}\; \frac{F}{EI}\,\delta \quad\Rightarrow\quad \underbrace{y'' + k^2 y}_{\text{Homojen kısım } y_h} = \underbrace{k^2\delta}_{\text{Homojen Olmayan kısım } y_p}$$

→ Homojen olmayan 2. Mert. dif. denk.

$y_h \rightarrow \quad y_h = C_1\cdot\cos kz + C_2 \sin kz$

$y_p \rightarrow \quad y_p = A$

$y_p' = 0$

$y_p'' = 0$

($k^2\delta z$ olsa $y_p = Az$, $k^2\delta z^2$ olsa $y_p = Az^2 + Bz + C$)

Bizdeki: $k^2\delta \Rightarrow y_p = A$

Denklemde yerine yazılırsa;

$y'' + k^2 y = k^2\delta$

$\Rightarrow 0 + k^2\cdot A = k^2\delta$

$\Rightarrow A = \delta$

$\Rightarrow y_p = \delta$

$\Rightarrow y = y_h + y_p = C_1\cdot\cos kz + C_2 \sin kz + \delta$

$z = 0$	$z = L$
$y = 0$	$y = \delta$

$\theta = \frac{dy}{dz} = y' = 0$

→

$\rightarrow \quad y = C_1 \cdot \cos kz + C_2 \sin kz + \delta$

$z = 0 \rightarrow y = 0 \qquad\qquad z = L \rightarrow y = \delta$

$\theta = 0$
$\hookrightarrow y'$

$z=0$ at $y \rightarrow \quad 0 = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \sin 0 + \delta$

$\Rightarrow \quad C_1 = -\delta$

$\Rightarrow \quad y = C_2 \sin kz - \delta \cos kz + \delta$

$z=0$ at $y' \rightarrow \quad y' = C_2 k \cos kz + \delta k \sin kz$

$0 = C_2 k \cdot \cos 0 + \delta k \sin 0$

$\Rightarrow \quad C_2 = 0$

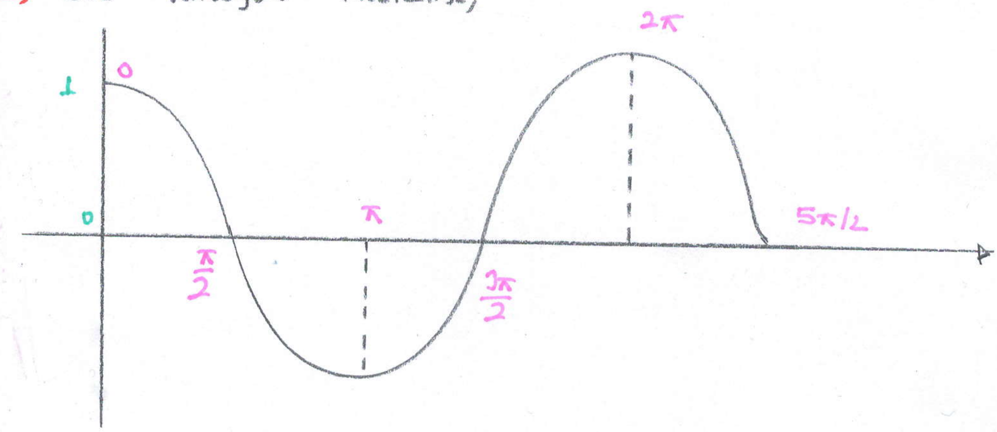
$\Rightarrow \quad y = \delta - \delta \cos kz = \delta (1 - \cos kz)$

$z=L$ at $y \rightarrow \quad \cancel{\delta} = \cancel{\delta} (1 - \cos kz)$

$\Rightarrow \quad 1 = 1 - \cos kz$

$\Rightarrow \quad \cos kz = 0$

$\rightarrow$ Cos fonksyonu incelenirse;



$\rightarrow \quad \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$n = 1, 3, 5, 7, \ldots$

$\cos kz = \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad kz = n \frac{\pi}{2}$

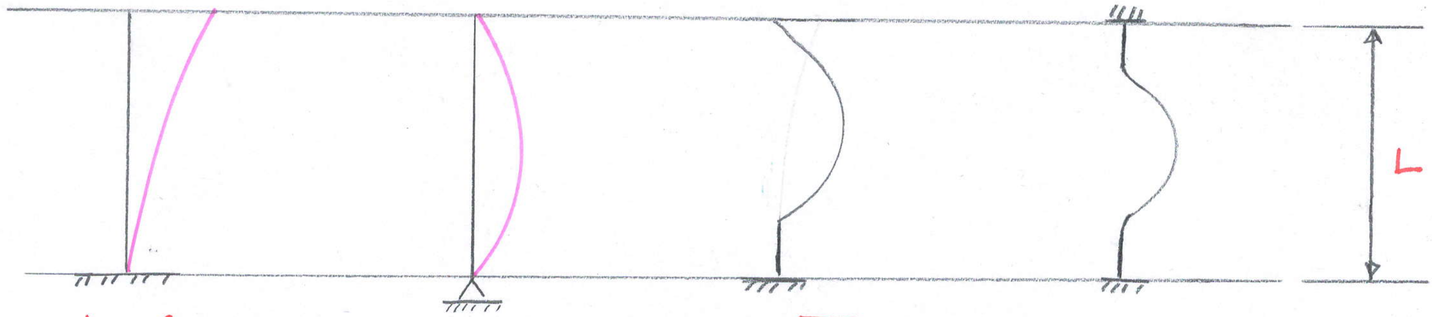
$\Rightarrow \quad k = \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad \Rightarrow \quad \frac{n\pi}{2} = \sqrt{\frac{F}{EI}} \cdot L$

$\Rightarrow \quad \frac{n^2 \pi^2}{4} = \frac{F}{EI} L^2$

$\Rightarrow \quad \bullet \; F_{kr} = \frac{n^2 \pi^2}{4 L^2} EI$

$n=1$ için $\rightarrow F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$

L_e: Efektif burkulma boyu

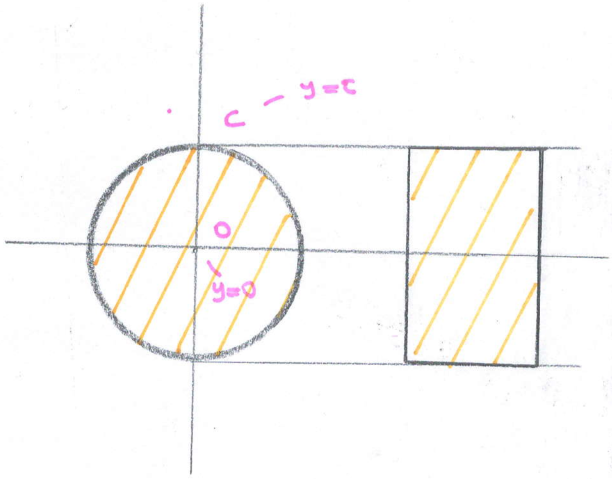


• $F_{kr} = \frac{\pi^2 . n^2}{Le^2} . EI$

- Gerilme için;

→ $\sigma = \frac{F}{A}$ ⇒ $\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{Le^2 . A}$

(n=1)



$I = y^2 A \Rightarrow \frac{I}{A} = y^2 = c^2$

⇒ $\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{Le^2} \cdot \overbrace{\frac{I}{A}}^{c^2} = \frac{\pi^2 E}{\underline{(Le/c)^2}}$

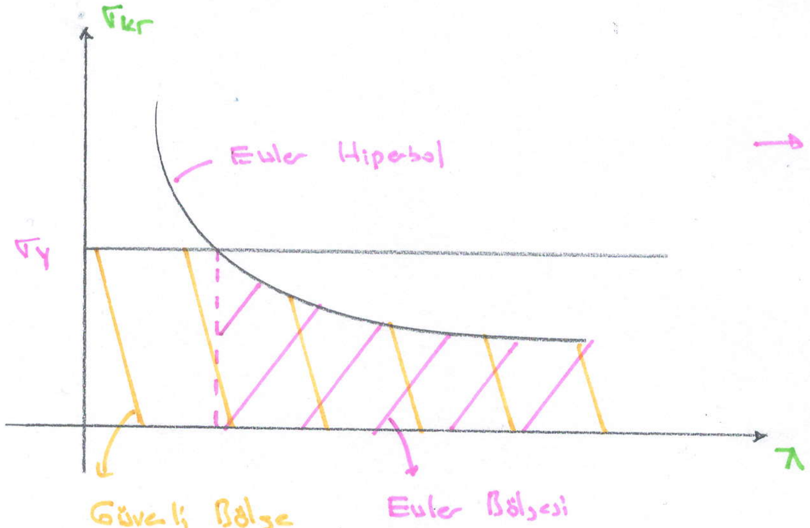
$\frac{Le}{c} = \lambda$ Narinlik - incelik oranı

Birimi yok

⇒ $\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$, $\lambda = \frac{Le}{c}$

↳ Hiperbol

⇒



→
- Euler denklemi narinlik oranı Euler bölgesine düşen malzemeler için kullanılabilir.
- Euler burkulma denklemi elastik bölgede geçerlidir.
- Diğer bir ifade ile Hooke bölgesinde.
- Zaten formül çıkarılırken elastik eğri denklemi kullanıldı.

- Dolayısıyla $\lambda < \lambda_y$ olan yerlerde gerilme σ_y değerini geçecektir.

- $\sigma_y = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2} \Rightarrow \lambda_y = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_y}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}}$

- Hooke kanunun geçerli olmadığı yerlerde ise tetmajer - amprik formüller kullanılır.
- Pratikte kullanılan tam tetmajer hesaplama formülü şöyledir;

→

- $\sigma_{kr} = a - b\lambda + c\lambda^2$ (MPa) , a, b, c malzemeye göre değişen katsayılardır ve birimleri MPa'dır.

- Sorularda $F_{kr} = \sigma_{kr} \cdot A$ ile bulunabilir.
- $\lambda < \lambda_y$ ise tetmajer.
- $\lambda \geq \lambda_y$ ise Euler denklemi.
- $F_{em} = \dfrac{F_{kr}}{S} \geq F$ → F: Uygulanan
- $\lambda = \dfrac{Le}{c}$, $c = \sqrt{\dfrac{I_{min}}{A}}$ → c: Atalet yarı çapı

↳ Bir çubuk - kiriş ataletinin zayıf olduğu eksen etrafında burkulacaktır. Dolayısıyla c için I_{min} alınır. Parça simetri eğilmeye maruz ise $I_x - I_y$ bulunup min. olan alınır. Eğer parça simetri olmayan eğilmeye (eğik eğilmeye) maruz ise asal atalet momentleri bulunup min. olan alınır.

- • $I_{max,min} = \dfrac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$ • $\tan 2\theta = -\dfrac{2 I_{xy}}{I_x - I_y}$

- Emniyet kontrolünü (burkulma) F_{kr} ile yapıyoruz.

→ • $F_{kr} = \sigma_{kr} \cdot A$, • $\dfrac{F_{kr}}{S} \geq F_{uygulanan}$

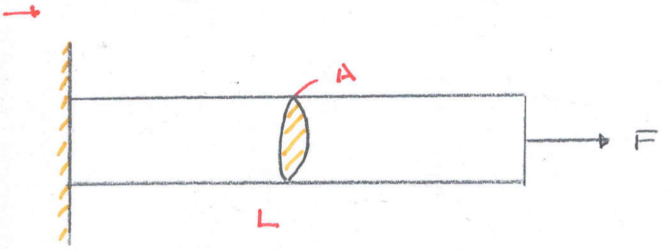
- $F_{kr} = n^2 \dfrac{\pi^2 E I}{Le^2}$

- $n \neq 1$ sorularında farklı yönlerdeki burkulmalar dikkate alınmalı ve $F_{min} = F_{em}$ alınmalı.

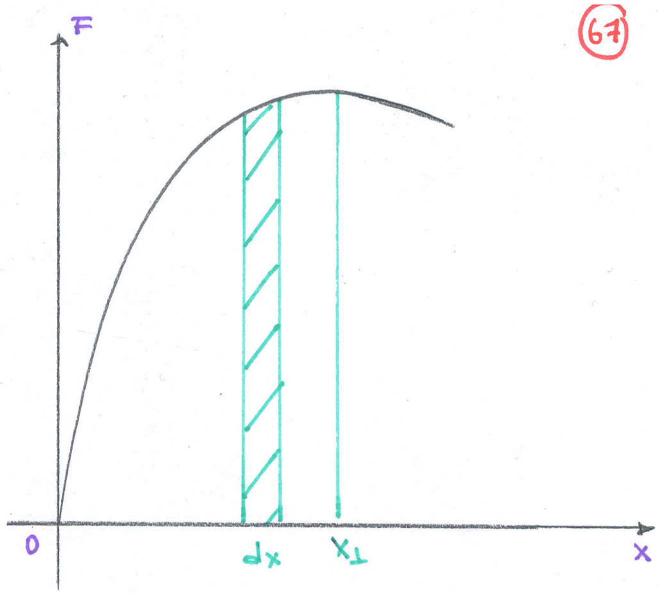
ENERJİ METODLARI

- Şekil değiştirme enerjisi;

→



$V = A.L$

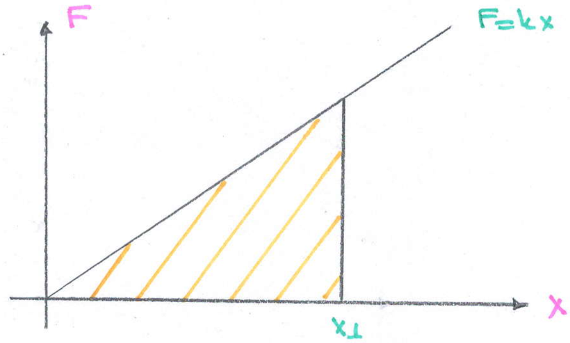


Yük – Deformasyon

⇒ $dU = \int_0^{x_1} F.\,dx$, $F = k.x$

⇒ $dU = \int_0^{x_1} (k.x)\,dx = \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} k\, x.x = \frac{1}{2} F.x$

veya



⇒ $U = \frac{1}{2} F.x$ (J)

↳ Taralı üçgenin alanı

- Şekil değiştirme enerjisinin yoğunluğu; dış kuvvetle etkisindeki bir cismin herhangi bir noktasındaki birim hacimde absorbe edilen enerji miktarıdır.
- Kısaca birim hacime düşen enerji miktarıdır.
- Bu da U/V 'dir enerji yoğunluğu adını da alır.
- $U = \int_0^{x_1} F.\,dx \Rightarrow \frac{U}{V} = \int_0^{x_1} \frac{F}{V}\,dx = \int_0^{x_1} \frac{F}{A.L}\,dx$, ∘ $\frac{F}{A} = \sigma_x$

∘ $\frac{dx}{L} = d\varepsilon_x$

⇒ $\frac{U}{V} = \int_0^{x_1} \sigma_x \, d\varepsilon_x$ (J/m^3)

NOT: Gerilme ve gerinme orantılıdır ve bu orana orantı limiti der. $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$

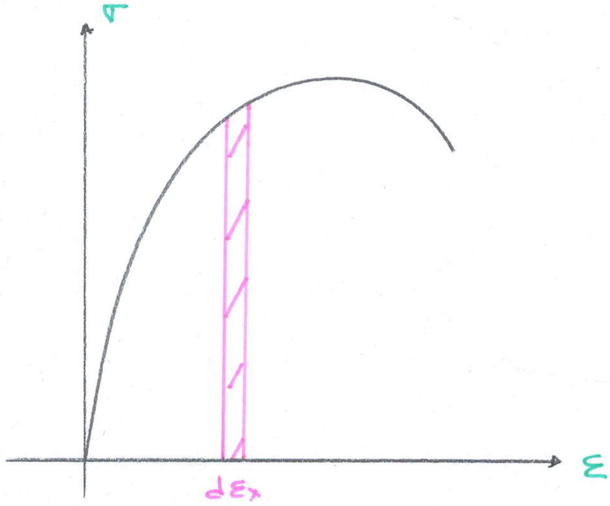
- $\frac{U}{V} = u$ olsun ⇒ $u = \int_0^{x_1} \sigma_x \, d\varepsilon_x = \int_0^{x_1} E.\varepsilon_x \, d\varepsilon_x = \frac{1}{2} E.\varepsilon_x^2$

→

$U=\frac{1}{2}E\cdot\varepsilon_x^2$, $\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}$ $\Rightarrow$ $U=\frac{1}{2}E\left(\frac{\sigma_x}{E}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{\sigma_x^2}{E}$

$\Rightarrow$ • $U=\frac{\sigma_x^2}{2E}$ (J/m^3) $\rightarrow$ Rezilyans degeridir.
Enerji yogunlugu
Esneklik modulu

VEYA



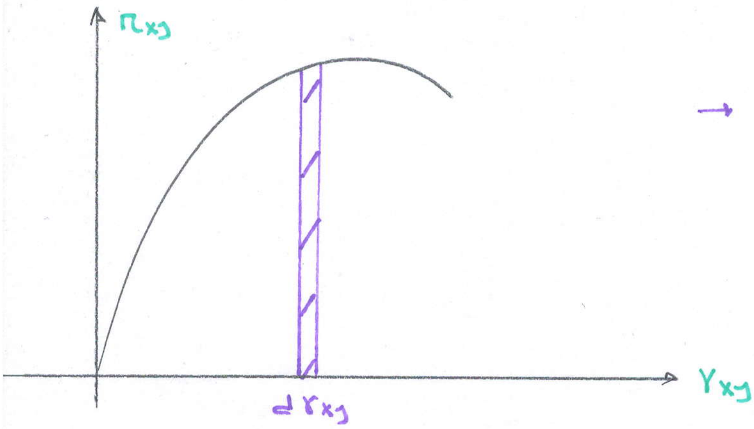
$\rightarrow$ $U=\frac{U}{V}=\int_0^{x_1}\sigma_x\,d\varepsilon_x$

$=\int E\,\varepsilon_x\,d\varepsilon_x$

$=\frac{E\,\varepsilon_x^2}{2}$, $\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}$

$\Rightarrow$ $U=\frac{\sigma_x^2}{2E}$ (J/m^3)

- Kesme kuvvetinin şekil değiştirme enerjisine bakarsak;



$\rightarrow$ $U=\frac{U}{V}=\int_0^{x_1}\tau_{xy}\,d\gamma_{xy}=\int(G\cdot\gamma_{xy})\,d\gamma_{xy}$

$\Rightarrow$ $U=\frac{G\cdot\gamma_{xy}^2}{2}$, $\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}$

$\Rightarrow$ $U=\frac{\tau_{xy}^2}{2G}$ (J/m^3)

Eğilme Momentinin Şekil Değiştirme Enerjisi

- $U=\int\frac{\sigma_x^2}{2E}dV$, $\sigma_x^M=\frac{M\cdot c}{I}$, $c=y$, $dV=A\,dx$

$\Rightarrow$ $U=\int\left(\frac{M\cdot y}{I}\right)^2\cdot\frac{1}{2E}\cdot A\,dx=\int_0^L\frac{M^2\,\overbrace{y^2 A}^{I}}{2EI^2}\cdot dx$

$\Rightarrow$ • $U_M=\frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}\cdot L$

Kesme Kuvvetinin Şekil Değiştirme Enerjisi

- $U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV$, $\tau_{xy}^V = \frac{VQ}{Ib}$, $dV = A \cdot dx$

$\Rightarrow U = \int \frac{V^2 Q^2}{2 I^2 b^2 G} A \cdot dx \; \frac{A}{A}$

$\Rightarrow U = \frac{1}{2GA} \left(\frac{AQ}{Ib} \right)^2 \int V^2 dx$

f_s Kesit faktörü.

Dikdörtgen için 1,2

$\Rightarrow \cdot \; U_V = \int_0^L f_s \frac{V^2}{2GA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{V^2}{GA} \cdot L \cdot f_s$

Burulma Momentinin Şekil Değiştirme Enerjisi

- $U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV$, $\tau_{xy}^T = \frac{T \cdot c}{J}$, $c = \rho$, $dV = A \cdot dx$

$\rho^2 A = J$

$\Rightarrow U = \int_0^L \frac{T^2 \cdot \rho^2}{2GJ^2} \cdot A \, dx \Rightarrow \cdot \; U_T = \frac{1}{2} \frac{T^2}{GJ} \cdot L$

NORMAL Kuvvetin Şekil Değiştirme Enerjisi

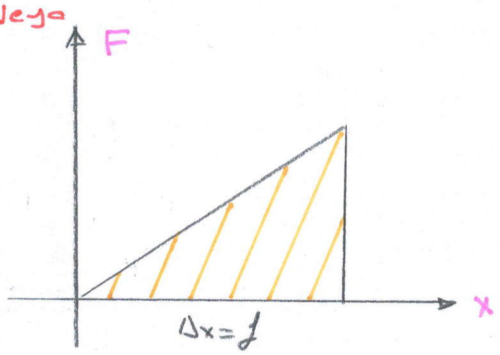
- $U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV$, $\sigma_x^F = \frac{F}{A}$, $dV = A \cdot dx$

$\Rightarrow U = \int \frac{F^2}{2A^2 E} A \, dx = \frac{F^2 L}{2AE}$

$\Rightarrow \cdot \; U_F = \frac{1}{2} \frac{F^2}{EA} \cdot L \quad (F = N)$

EA: Uzama rijitliği
EI: Eğilme rijitliği
GA: Kesme rijitliği
GJ: Burulma rijitliği

Veya



$U = \text{Üçgen Alanı} = \frac{1}{2} F \Delta x = \frac{1}{2} F \cdot \delta$

$\delta = \frac{PL}{AE} \Rightarrow U = \frac{1}{2} F \cdot \frac{FL}{AE}$

$\Rightarrow \cdot \; U_F = \frac{1}{2} \frac{F^2}{EA} L$

Toplam Şekil Değiştirme Enerjisi

- • $W_T = W_N + W_V + W_M + W_T$

⇒ • $W_T = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{N^2}{EA} + \frac{V^2}{GA} \cdot f_s + \frac{M^2}{EI} + \frac{T^2}{GJ} \right] dx$, • $f_s = \left(\frac{AQ}{Ib} \right)^2$

Clapeyron Enerjinin Korunumu Teoremi

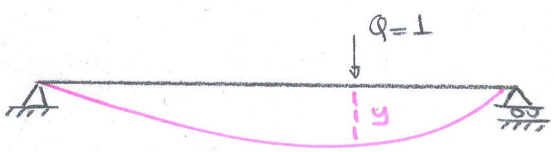
- Burada enerjinin korunumu, mekanik enerji dengesi anlamına gelir.
- Dış kuvvetlerin yaptığı iş, cismin içinde şekil değiştirme enerjisi olarak depolanır.
- Dolayısıyla;

→ • $W_D = W_i$

- W_i şekil değiştirme enerjisi olduğu gibi iç kuvvetlerin yaptığı iş olarak da adlandırılabilir.
- Dış kuvvetlerin yaptığı iş, iç kuvvetlerin yaptığı işe eşittir.
- Kuvvetin sisteme yavaş bir şekilde uygulandığı varsayılır.
- Aksi halde kinetik enerji oluşur.
- Clapeyron teoremi yetersizdir.
- Sistemde birden fazla kuvvet olduğunda çok bilinmeyenli tek denklem oluşmaktadır.
- Bu durumda denklem çözümü imkansızdır.
- • $W_D^F = \frac{1}{2} F \Delta x$ • $W_D^M = \frac{1}{2} M \Delta \theta$

Virtüel İş Prensibi

- Enerjinin korunumunun genişletilmiş halidir.
- Dış kuvvetlerin işi, iç kuvvetlerin virtüel işine eşittir.
- Kuvvetler zamandan bağımsızdır.
- Yer değiştirmeler çok küçük olmalıdır.
-



• $V_d = Q \cdot y$

→ • $W_i = \frac{1}{2} \int_0^L \left[f_s \cdot \frac{V^2}{GA} + \frac{M^2}{EI} \right] dx$

→

→ İşi denkleminin Q'ya göre kısmi türevi alınırsa iç kuvvetlerin yaptığı virtüel iş prensibi;

$y = 1$ olsun;

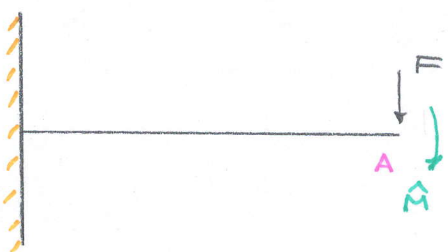
$$\hookrightarrow \frac{dW_i}{dQ} = 1 = \int_0^L \left[f_s \frac{V.V'}{GA} + \frac{M.M'}{GJ} \right] dx \qquad \circ\ V' = \frac{\partial V}{\partial Q} \qquad \circ\ M' = \frac{\partial M}{\partial Q}$$

Virtüel iş denklemi

- Sehimi bulmak istenen noktaya $\hat{Q}=1$ virtüel (sanal - fiktif) kuvveti uygulanır.
- Eğim için ise $\hat{M}=1$ virtüel momenti uygulanır.

Castigliano Teoremi

- 1. teoremi elastik bölge için uygulanır.
- 2. teoremi ise hem elastik hem plastik için uygulanır.
- Virtüel iş denkleminde gördüğü gibi şekil değiştirme enerjisinin istenilen bir noktadaki kuvvete göre kısmi türevi o noktadaki sehimi verir.
- Momente göre türevi ise eğimi verir.
- İstenilen noktada kuvvet veya moment yoksa hayali olarak uygulanır ve daha sonra sıfırlanır.
- Virtüel iş prensibinde istenilen noktada kuvvet-moment olsa bile $Q=1$ veya $\hat{M}=1$ ekleniyordu.
- Castigliano'da ise kuvvet veya moment varsa $Q-\hat{M}$ eklemeye gerek yoktur.
- Virtüel iş prensibinde Q'nun yani sanalın işi ele alınırken, Castigliano'da gerçek ve gerçekse sanal kuvvetlerin işi ele alınır.



$$\delta_A = \int_0^L \frac{M.M'}{EI} dx, \qquad M' = \frac{\partial M}{\partial F} \qquad \theta_A = \int_0^L \frac{M.M'}{EI} dx$$

$$M' = \frac{\partial M}{\partial \hat{M}}$$

ve sonra

$\hat{M} = 0$