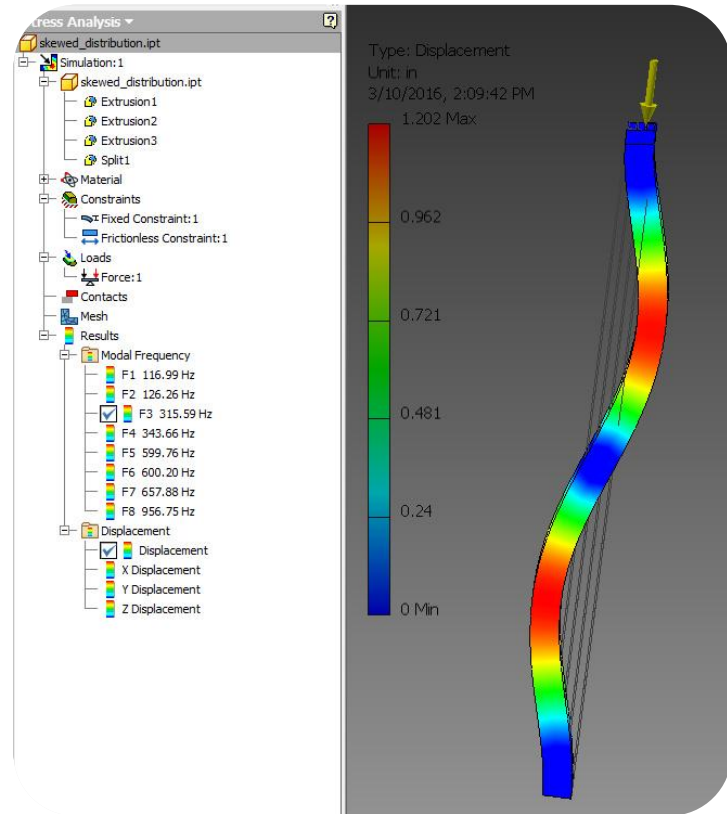
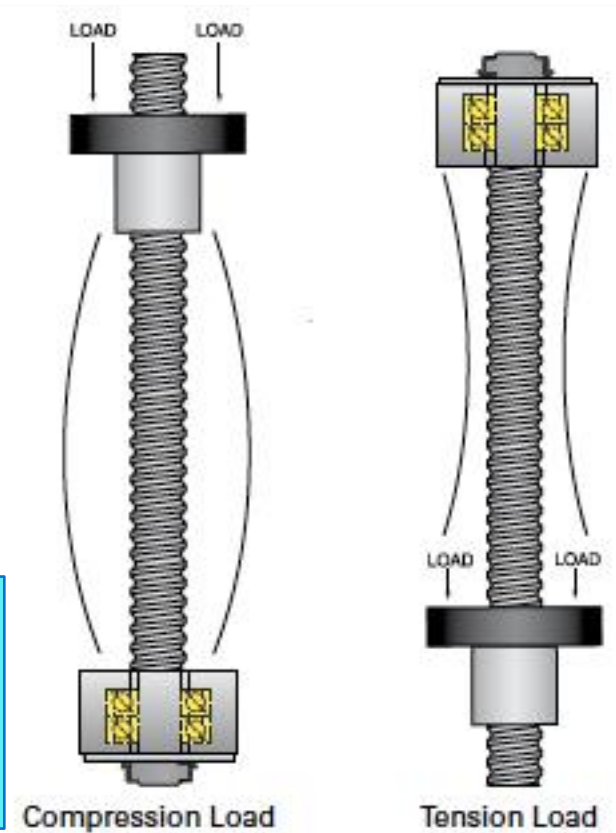


BURKULMA

(BUCKLING)



Prof. Dr. Hamit AKBULUT
Arş. Gör. Burak HÜLAGÜ



compression load

tension load

İNCE KOLONLAR

Kolonlar, kendi ağırlıklarına ve aksenal bası yüklerine maruz elemanlardır. Kolonlar, **ince ve kalın kolonlar** olmak üzere iki grupta incelenebilir.

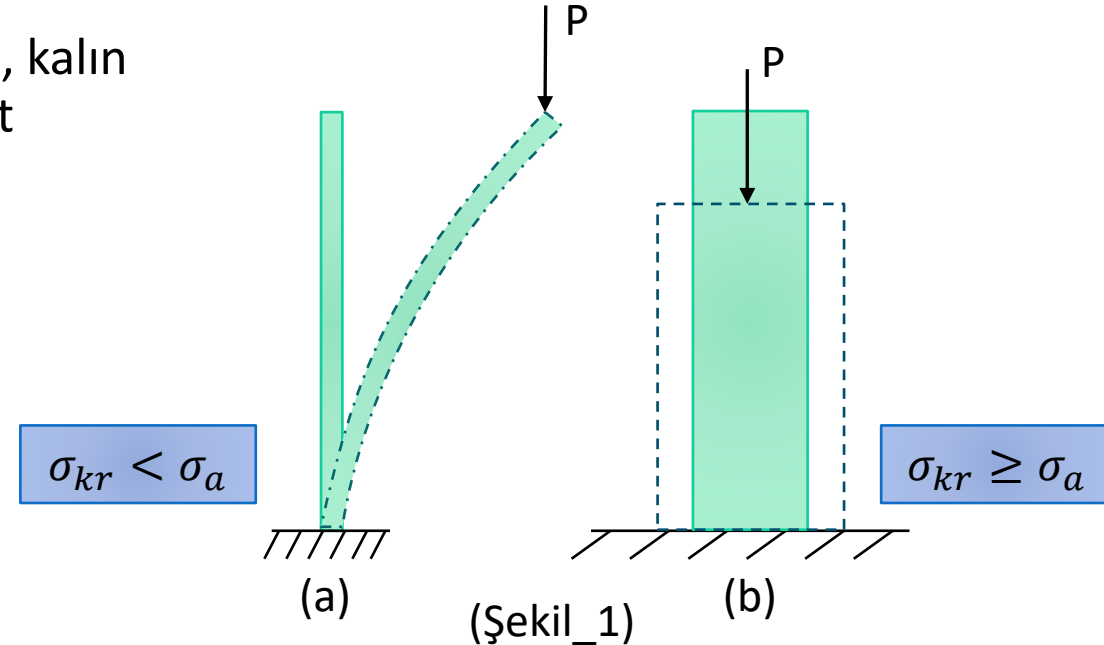
Kolonlara aksenal basınç kuvvetleri etkiğinde yanıl bükülmenin meydana geldiği gerilme durumuna “**Burkulma**” denir. Burkulmanın meydana geldiği gerilme σ_{kr} ise malzemenin akma gerilmesi σ_a ise, $\sigma_{kr} < \sigma_a$ olması halinde **ince kolon**, $\sigma_{kr} \geq \sigma_a$ olması halinde ise **kalın kolon** olarak adlandırılır. (Şekil_1)

İnce kolonlar, akma gerilmesi değerine erişmeden burkulurken, kalın kolonlar stabilizesini korur ve kolon malzemesi akma mukavemet sınırına eriştikten sonra kolon ezilir.

Bunun yanında narinlik katsayısıyla kolonları sınıflamak mümkündür. Malzemenin **narinlik katsayısı λ** ve **kritik narinlik katsayısı λ_{kr}** olmak üzere ;

$\lambda > \lambda_{kr}$ -----> İnce Kolon

$\lambda \leq \lambda_{kr}$ -----> Kalın Kolon



Kolon Burkulması :

1) A ucu mafsallı ve B ucu klavuzlu mafsallı L uzunluklu, F aksenal kuvvetine maruz kolonu düşünelim. (Şekil_2) Kiriş malzemesinin elastisite modülü E, kiriş kesitinin atalet momenti I (Ix) olmak üzere ikinci mertebe teorisine göre kirişin herhangi bir noktası için;

$$M = F \cdot y, \quad \frac{d^2y}{dz^2} = y'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{F \cdot y}{EI} \quad \text{-----(1)}$$

$\frac{F}{EI} = k^2$ Alınırsa bu diferansiyel denklemin çözümü ;

$$y'' + k^2y = 0 \quad \text{-----} \rightarrow (D^2 + k^2)y = 0 \quad , r^2 + k^2 = 0 \quad \text{-----} \rightarrow$$

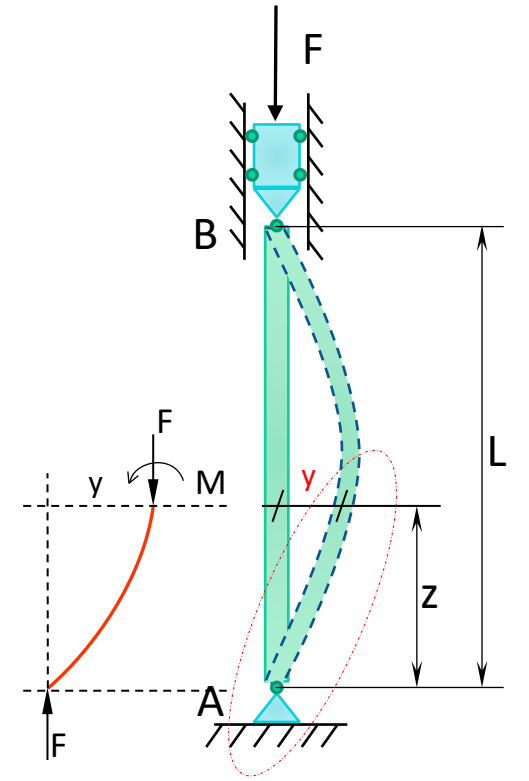
$$y = A \cos kx + B \sin kx \quad \text{-----(2)}$$

genel çözümü elde edilir. A ve B sabitleri sınır şartları ile bulunur;

$$z=0 \quad \text{için} \quad y=0 \quad \text{-----} \rightarrow A=0$$

$$z=L \quad \text{için} \quad y=0 \quad \text{-----} \rightarrow B \cdot \sin(kL) = 0 \quad \text{olmalıdır.}$$

Burada **B≠0 olmalıdır** dolayısı ile $\sin kL = 0$ olmalıdır



(Şekil_2)

$$r_1 = +ki \quad r_{1,2} = \alpha \mp \beta i$$

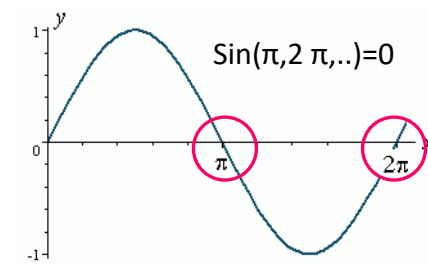
$$r_2 = -ki \quad \alpha = 0, \beta = k$$

$$y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

Karmaşık köke sahip yüksek mertebeden homojen diferansiyel denklemin genel çözümü.

B sabiti sıfır olamayacağı ve $\sin(kL)=0$ olacağı için , kL değeri sinüs fonksiyonunu sıfır yapan değer olmalıdır.

=> $kL=\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ (Tam sayı) Değerlerinden birisidir. $kL=\pi$ alınır ise -----> $k = \frac{\pi}{L}$ -----(3)



Veya $k^2 = \frac{\pi^2}{L^2} = \frac{F}{EI}$ -----(4) , bu denklemden elde edilecek F kuvveti kritik burkulma yüküdür:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \text{ -----(5)}$$

2) A ucu ankastre B ucu serbest kolon (Şekil_3): B ucunda meydana gelen sehim δ olmak üzere ikinci mertebe teorisine göre;

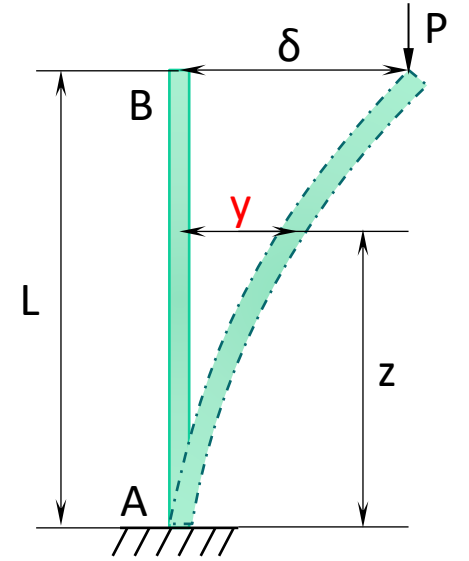
$$M = -F(\delta - y), \quad \frac{d^2 y}{dz^2} = y'' = -\frac{M}{EI} = \frac{F(\delta - y)}{EI} \text{ -----(6) yazılabilir.}$$

Burada $\frac{F}{EI} = k^2$ alınırsa -----> $y'' + k^2 y = k^2 \delta$ -----(7) dif. Denklemi elde edilir. Bu dif. denklemin çözümü;

$$y = C \cos kz + D \sin kz + \delta \text{ -----(8) Şeklinde olur ve sınır şartları;}$$

$$z=L \quad \text{için} \quad y' = \frac{dy}{dz} = 0 \text{ -----> } D=0$$

$$z=0 \quad \text{için} \quad y=0 \text{ -----> } C = -\delta \text{ olur ve çözüm fonksiyonu -----> } y = \delta(1 - \cos kz) \text{ -----(9)}$$



(Şekil_3)

Buradan $z=L$ için $y= \delta$ olduğundan $\cos(kL)=0$ olmalıdır. Buna göre;

$$kL = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots = \frac{n\pi}{2}, n = (1,3,5, \dots) \text{-----(10)}$$

$$n = 1 \text{ için } kL = \frac{\pi}{2} \text{ ----> } k = \frac{\pi}{2L} \text{ ----> } k^2 = \frac{\pi^2}{4L^2} \text{-----(11)}$$

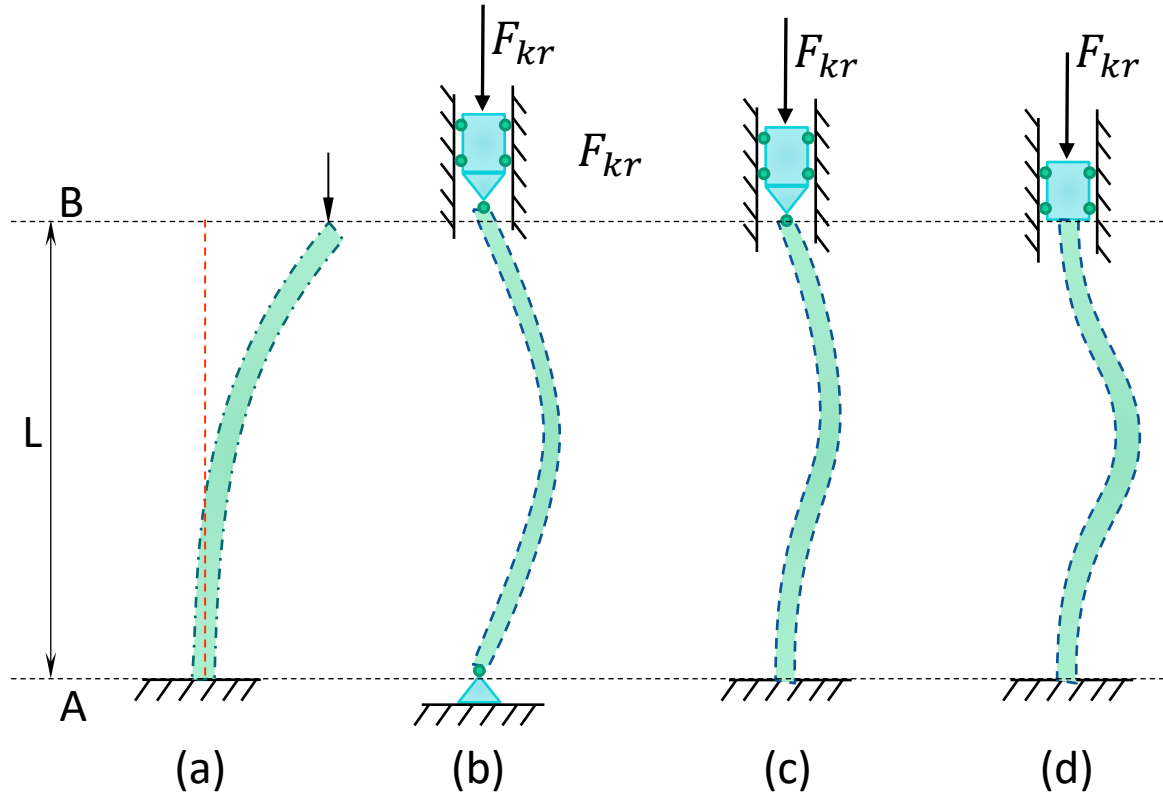
$\Rightarrow k^2 = \frac{\pi^2}{4L^2} = \frac{F}{EI}$ olduğuna göre kritik burkulma kuvveti;

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \text{-----(12)}$$

Kolonların diğer mesnetlenme durumları için de benzer şekilde hesaplar yapılarak kritik yükler hesaplanabilir.

A mafsalı küresel olması, kesitin dairesel olmaması durumunda minimum atalet momentine göre hesap yapılır.

Farklı mesnetlenme durumlarına göre burkulma yükleri Tablo_1' de verilmektedir.



(Şekil_3)

Kolon	Kritik Kuvvet (F_{kr})	L_{kr}
a	$\frac{\pi^2 EI}{4L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$	$2L = L_{kr}$
b	$\frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$L = L_{kr}$
c	$\frac{2\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(\sqrt{0,5} \cdot L)^2}$	$\sqrt{0,5}L = L_{kr}$
d	$\frac{4\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0,5 \cdot L)^2}$	$0,5L = L_{kr}$

(Tablo_1)

$$\longrightarrow F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{kr}^2} \longleftarrow$$

EULER BURKULMA DENKLEMİNİN SINIRI

Kolonlardaki kritik burkulma yükü $F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{kr}^2}$ (13) olarak bulunmuştu.

Paydadaki L_{kr} her bir mesnet durumu için kritik burkulma boyudur. Kritik yükün neden olduğu normal gerilme ise;

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{L_{kr}^2 \cdot A} \quad \text{ve} \quad I = i^2 \cdot A \quad \rightarrow \quad A = \frac{I}{i^2} \quad (14) \quad (i = \text{Jirasyon/Atalet Yarı Çapı})$$

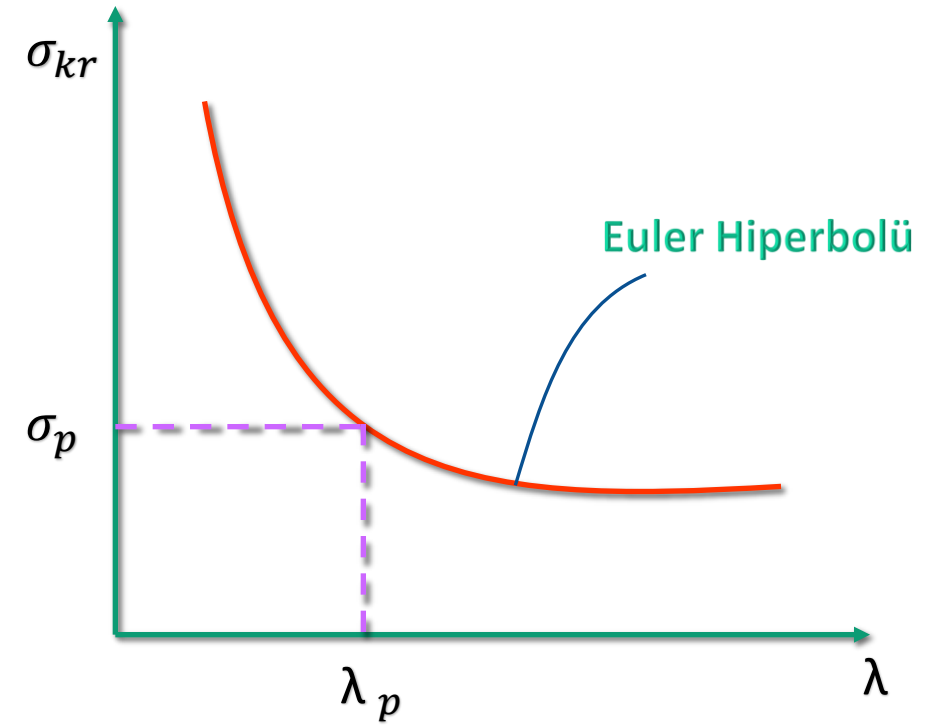
$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{kr}^2 \cdot \left(\frac{I}{i^2}\right)} = \frac{\pi^2 E}{\underbrace{\left(\frac{L_{kr}}{i}\right)^2}_{\lambda}} \quad \rightarrow \quad \sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{L_{kr}}{i} \quad (15)$$

Şeklinde olur. Burada λ narinlik oranıdır. $\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ denklemi bir **hiperbol** denklemdir. σ_o orantı sınırını göstermektedir. σ_o gerilmesini aşan gerilmeler için Hooke bağıntısı geçerli olmadığından hiperbolün ilgili bölgesi kullanılamaz. Yani hiperbolde σ_p ye karşılık gelen narinlik

derecesi $\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$ olmaktadır.

λ narinlik oranı λ_p den olan kolonlarda Euler burkulma denlemi geçerli değildir.

Elastik olmayan bölgedeki burkulmayı incelemek için, değişik malzemelerle yapılan deneylere dayanan ampirik formüller kullanılır. Bunların en kullanışlı olanları Tetmajer formülleridir.



(Şekil_5)

Çelik (St38)	$\sigma_{kr} = 310,0 - 1,14\lambda$	$\lambda < \lambda_p = 105$
Ahşap	$\sigma_{kr} = 29,3 - 0,194\lambda$	$\lambda < \lambda_p = 100$
Pik Demir(GG)	$\sigma_{kr} = 776 - 12\lambda + 0,053\lambda^2$	$\lambda < \lambda_p = 80$

(Tablo_2)

----- (16)

1. P_{kr} 'nin Hesabı;

Kesitle ilgili olarak I , A , i ve λ hesaplanır. $\lambda > \lambda_{kr}$ ise (13) Euler denklemi kullanılır. Eğer $\lambda < \lambda_{kr}$ ise tetmajer formülünden σ_{kr} gerilmesi hesaplanır. P_{kr} yükü ise $P_{kr} = \sigma_{kr} \cdot A$ dan bulunur.

“n” burkulma güvenlik katsayısı olmak üzere kolonun emniyetle taşıyabileceği yük

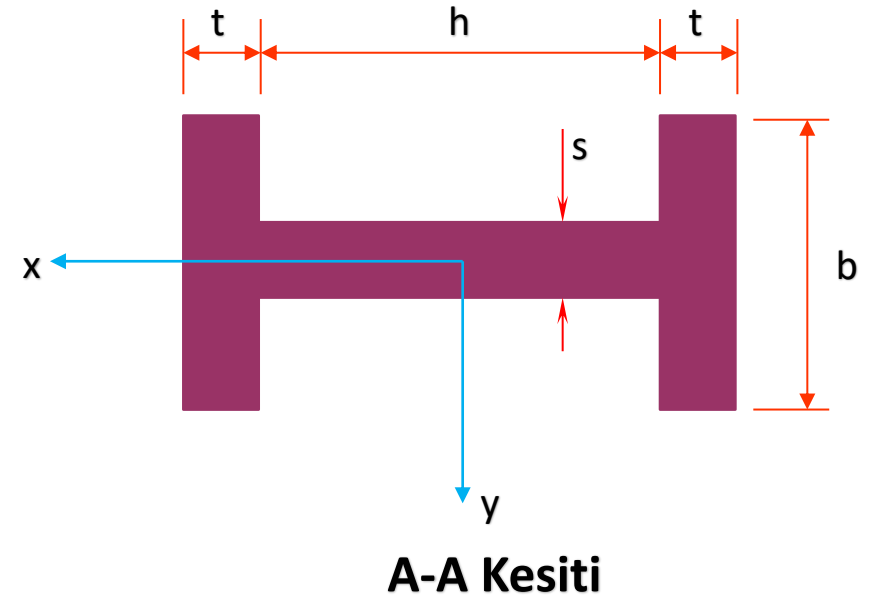
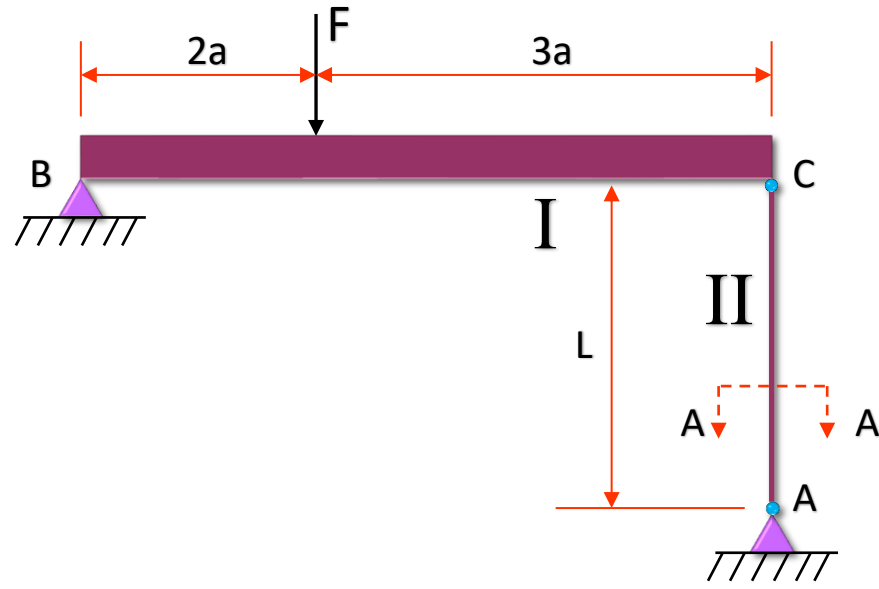
$$P_{em} = \frac{P_{kr}}{n} \text{ den bulunur.}$$

2. P_{kr} 'nin Hesabı;

P yükü biliniyor, kesit bilinmiyorsa λ kontrolü başlangıçta yapılamaz. Burkulmanın elastik bölgede olduğunu kabul ederek $P_{kr} = n \cdot P$ alınarak Euler formülünden $I = \frac{nPL_{kr}^2}{\pi^2 E}$ atalet

momenti hesaplanır. Bu I atalet momenti olacak şekilde kesite boyut verilir. Bundan sonra sırasıyla A , i ve λ hesaplanır ve sonra λ kontrolü yapılır. $\lambda > \lambda_p$ ise burkulma elastik olup kesit yeterlidir. Eğer $\lambda > \lambda_{kr}$ ise elastik olmayan burkulma söz konusudur. Bu durumda Tetmajer formülleri kullanılarak yeniden kesit hesabı yapılır.

ÖRNEK



Şekilde verilen taşıyıcı sistemde II numaralı çubuğun basma ve burkulma yönünden emniyetli olup olmadığını bulunuz. Burkulma emniyet katsayısını belirleyiniz.

$$F = 160 \text{ kN}, \quad E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_{b_{em}} = 100 \text{ MPa}$$

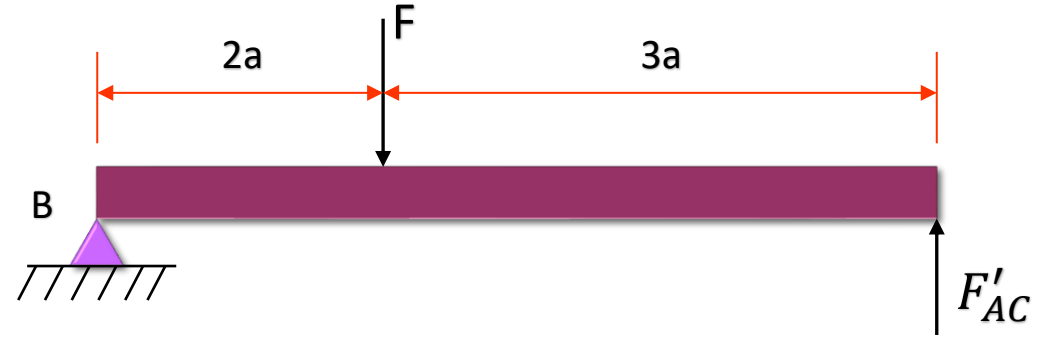
$$\sigma_p = 190 \text{ MPa}, \quad \lambda < \lambda_p \text{ için } \sigma_{kr} = 310 - 1,14\lambda \text{ (MPa)}$$

$$\begin{aligned} s &= 4,5 \text{ mm} & b &= 50 \text{ cm} \\ L &= 75 \text{ cm} & h &= 86 \text{ mm} \\ a &= 10 \text{ cm} & t &= 7 \text{ mm} \end{aligned}$$

ÇÖZÜM

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 2aF - 5aF'_{AC} = 0$$

$$F'_{AC} = \frac{2}{5}F = \frac{2}{5}160 = 64kN$$



$$I_x = \frac{hs^3}{12} + 2\frac{tb^3}{12} = 14,65 \text{ cm}^4, \quad I_y = \frac{sh^3}{12} + 2\left[\frac{bt^3}{12} + bt\left(\frac{h}{2} + \frac{t}{2}\right)^2\right] = 175,5 \text{ cm}^4$$

-----> $I_{min}=I_x = 14,65 \text{ cm}^4$

$$A = hs + 2bt = 10,87 \text{ cm}^2$$

$$\lambda = \frac{L_{kr}}{\sqrt{I_{min}/A}} = \frac{75}{\sqrt{14,65/10,87}} = 64,6 \quad \lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = 104,44$$

-----> $\lambda < \lambda_p$ olduğuna göre Tetmajer denklemini kullanılır

ÇÖZÜM

$$\sigma_{kr} = 310,0 - 1,14\lambda = 236,35 \text{ MPa}$$

$$F_{kr} = \sigma_{kr} \cdot A = 236,35 \times 1087 = 256\,900 \text{ N} = 256,9 \text{ kN}$$

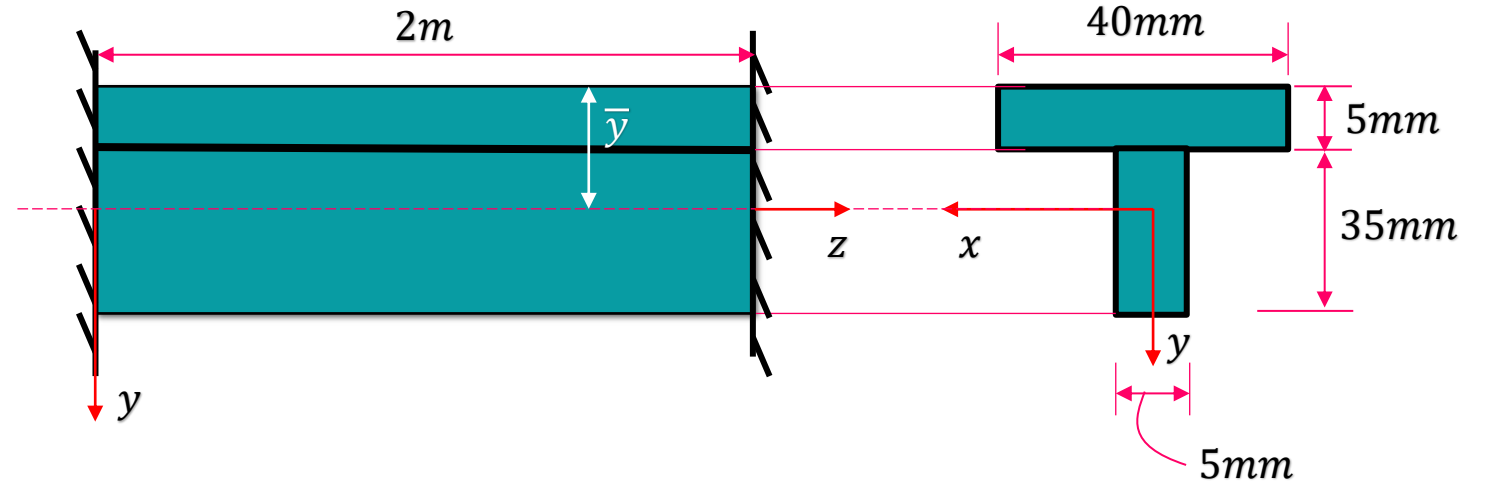
$$n = \frac{F_{kr}}{F'_{AC}} = \frac{256,9}{64} = 4,01$$

$$\sigma_b = \frac{F'_{AC}}{A} = \frac{64\,000}{1087} = 58,87 \text{ MPa} < \sigma_{b_{em}} \text{ -----> EMNİYETLİ}$$



ÖRNEK

Şekilde görülen iki ucu ankastre T profilli çubuğun Euler bölgesinde burkulmaya karşı emniyet katsayısının 2 olması istenmektedir. Bu durumda çubuğun en fazla ne kadar ısıtılacağını hesaplayınız.



$$\alpha = 11 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^{\circ}\text{C}, \quad E = 210 \text{ GPa}, \quad \lambda_p = 105$$

ÇÖZÜM

$$\bar{y} = \frac{40 \cdot 5 \cdot 2,9 + 35 \cdot 5 \cdot 22,5}{40 \cdot 5 + 35 \cdot 5} = 11,83 \text{ mm}$$

$$A = 40 \cdot 5 + 35 \cdot 5 = 375 \text{ mm}^2$$

$$L_{kr} = 0,5 \cdot L = 1000 \text{ mm (Tablo_1)}$$

ÇÖZÜM

$$I_x = \left[\frac{40.5^3}{12} + 200 \cdot (2,5 - 18,3)^2 \right] + \left[\frac{5.35^3}{12} + 175 \cdot (2,5 - 18,3)^2 \right] = 55,62 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{5.40^3}{12} + \frac{35.5^3}{12} = 27,03 \cdot 10^3 \text{ mm}^4 \quad \text{-----} \rightarrow I_{min}=I_y = 27,03 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$i = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{27,03 \cdot 10^3}{375}} = 8,59 \text{ mm} \quad \text{-----} \rightarrow \lambda = \frac{L_{kr}}{i} = 116,4$$

$$\lambda = \frac{L_{kr}}{\sqrt{I_{min}/A}} = \frac{1000}{\sqrt{27,03 \cdot 10^3 / 375}} = 117,78 > \lambda_p \quad \text{-----} \rightarrow F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{L_{kr}} = 56,025 \text{ kN}$$

$$F = \frac{F_{kr}}{n} = 28,012 \text{ kN} \quad \text{-----} \rightarrow \text{Uyg. denk. } (\Delta L)_{top} = 0 \Rightarrow -\frac{FL}{AE} + \alpha \Delta T L = 0$$

$$F = AE\alpha\Delta T \quad \text{-----} \rightarrow \Delta T = 32,33 \text{ }^\circ\text{C}$$

ÖRNEK

Şekilde görülen AC çubuğu F burkulma yüküne maruzdur. X yönünde burkulmaya karşı B noktasından desteklenmiştir. Sistemin burkulma emniyet katsayısını 2,5 alarak emniyetle taşınabilecek F kuvvetini hesaplayınız.

$$L = 5,5 \text{ m}$$

$$E = 210 \text{ Gpa}$$

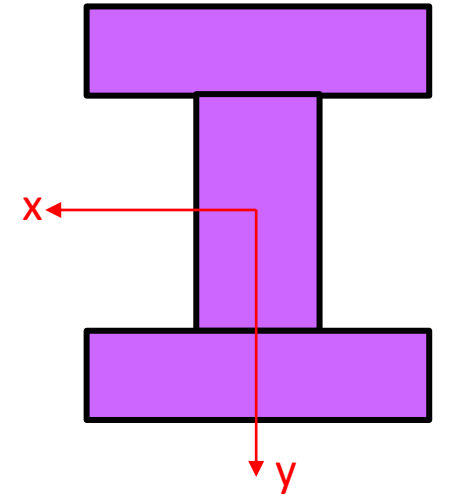
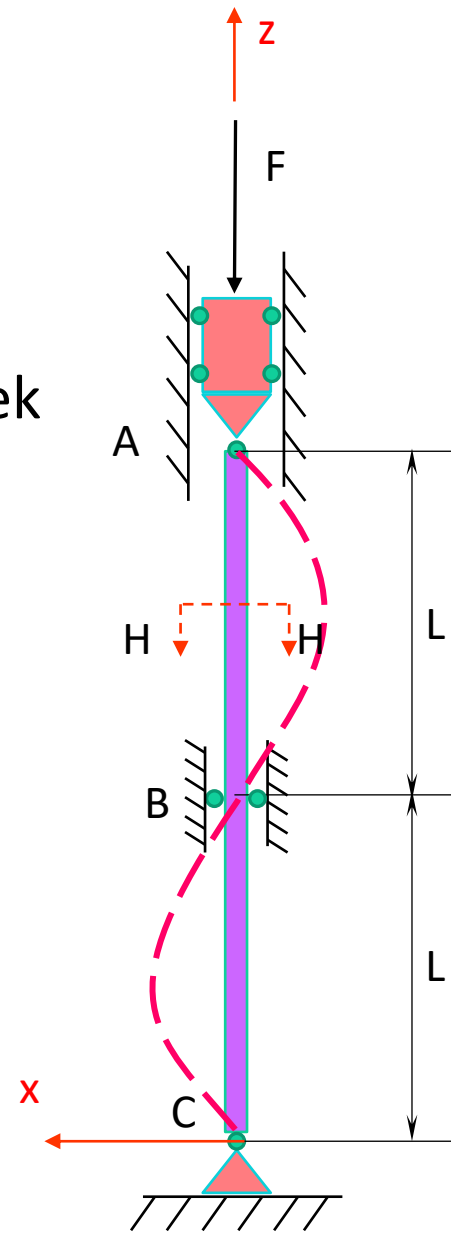
$$A = 7800 \text{ mm}^2$$

$$\lambda_p = 105$$

$$I_x = 57 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 20 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$L_e = L = 5,5 \text{ m}$$



H-H Kesiti

ÇÖZÜM

a) Şekil düzleminde x doğrultusunda burkulma:

$$L_e = L = 5500 \text{ mm} \quad I = I_y = 20 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad \text{alınır.}$$

$$\lambda = \frac{L_{kr}}{\sqrt{I/A}} = \frac{5500}{\sqrt{20 \cdot 10^6 / 7800}} = 108,6 > \lambda_p \text{ -----> Euler bölgesi.}$$

$$F_1 = \frac{F_{kr}}{s} = \frac{\pi^2 E I_y}{L_e^2 s} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^6}{5500^2 \cdot 2,5} = 548 \, 130 \text{ N} = 548,13 \text{ kN}$$

$$F_1 = \frac{F_{kr}}{EK} = \frac{\pi^2 E I_y}{L_e^2 s} \quad F_{kr} = n^2 \frac{\pi^2 E I_y}{(2L)^2} \quad L_e = 2L$$

2 durum sözkonusudur. Birisinde
Çubuk mesnetlerin engeli ile 2 göbek
verecektir (x doğrultusu). Diğer durumda ise
mesnetlere değmeden tek göbek vererek
burkulacaktır (y doğrultusu).

ÇÖZÜM

b) Şekil düzleminde y doğrultusunda burkulma:

$$L_{kr} = 2L = 1100 \text{ mm} , I = I_x = 57 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \text{ alınır.}$$

$$\lambda = \frac{L_{kr}}{\sqrt{I/A}} = \frac{1100}{\sqrt{57 \cdot 10^6 / 7800}} = 128,7 > \lambda_p \text{ -----> Euler bölgesi.}$$

$$F_2 = \frac{F_{kr}}{s} = \frac{\pi^2 EI_x}{L_{kr}^2 s} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 57 \cdot 10^6}{1100^2 \cdot 2,5} = 390\,543 \text{ N} = 390,54 \text{ kN}$$

Taşınabilecek en büyük kuvvet, $F_2 < F_1$ olduğu için;

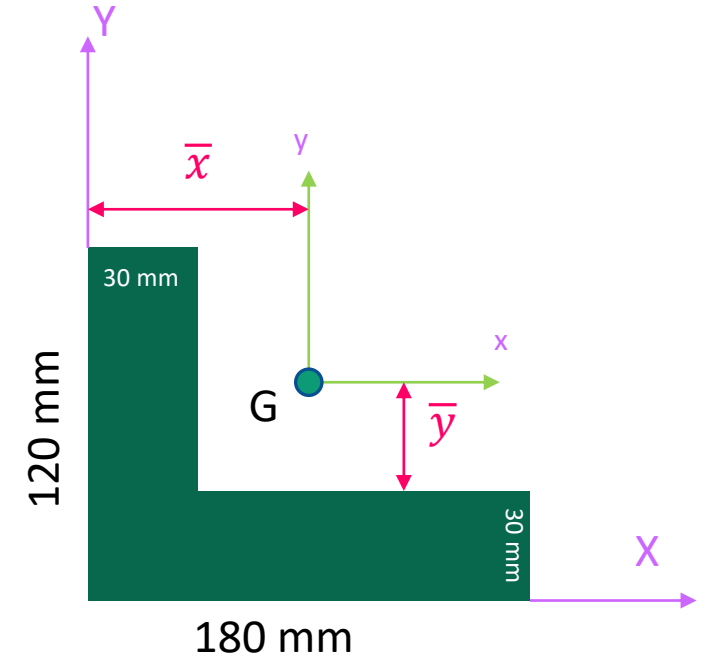
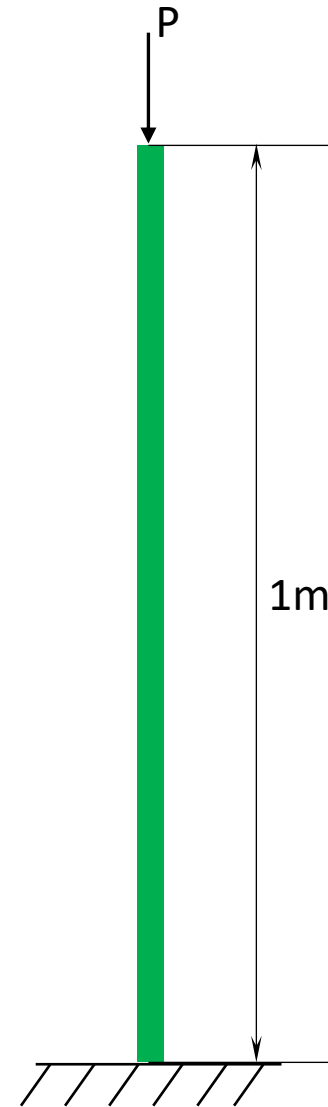
$$\mathbf{F = F_2 = 390,54 \text{ kN}}$$

ÖRNEK

Şekildeki ahşap kolonun $n=3$ güvenliği ile taşıyabileceği P yükünü hesaplayınız.

$$E = 10 \text{ Gpa} \quad \bar{x} = 65 \text{ mm}$$

$$\lambda_p = 100 \quad \bar{y} = 35 \text{ mm}$$



ÇÖZÜM

$$I_x = \left[\frac{30 \cdot 90^3}{12} + 2700 \cdot (75 - 35)^2 \right] + \left[\frac{180 \cdot 30^3}{12} + 5400 \cdot (15 - 35)^2 \right] = 8,71 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \left[\frac{90 \cdot 30^3}{12} + 2700 \cdot (15 - 65)^2 \right] + \left[\frac{30 \cdot 180^3}{12} + 5400 \cdot (90 - 65)^2 \right] = 24,9 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = [2700 \cdot (75 - 35) \cdot (15 - 65)] + [5400 \cdot (15 - 35) \cdot (90 - 65)] = -8,1 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Asal atalet momentleri;

$$I_{max,min} = \frac{I_x + I_y}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{I_x + I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2} \Rightarrow \begin{matrix} I_{max} = 28,26 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \\ I_{min} = 5,353 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \end{matrix} \text{ bulunur ve } I_{min} \text{ kullanılır.}$$

$$\text{Kesit alanı } A = 90 \cdot 30 + 180 \cdot 30 = 8100 \text{ mm}^2$$

$$\text{Atalet yarı çapı } i = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{5,535 \cdot 10^6}{8100}} = 25,7 \text{ mm}$$

$$L_{kr} = 2L = 2m = 2000 \text{ mm}$$

Kesit geometrisi nedeni ile çubuk farklı bir yönde burkulma yapacaktır dolayısı ile asal atalet momentler kullanıldı.

ÇÖZÜM

$$\lambda = \frac{L_{kr}}{i} = \frac{2000}{25,7} = 77,82 < \lambda_p \text{ -----> Tetmajer formülü kullanılır.}$$

$$\sigma_{kr} = 29,3 - 0,194\lambda = 29,3 - 0,194 \cdot 77,82 = 14,21 \text{ Mpa}$$

$$P_{kr} = \sigma_{kr} \cdot A = 14,21 \times 8100 = 115,1 \cdot 10^3 \text{ N} = 115,1 \text{ kN}$$

$$P = \frac{P_{kr}}{n} = \frac{115,1}{3} = 38,36 \text{ kN}$$

ÖRNEK

Şekildeki kolonun kritik burkulma yükünü bulunuz.

ÇÖZÜM

$$M = F_y \cdot x - (\delta - x)P$$

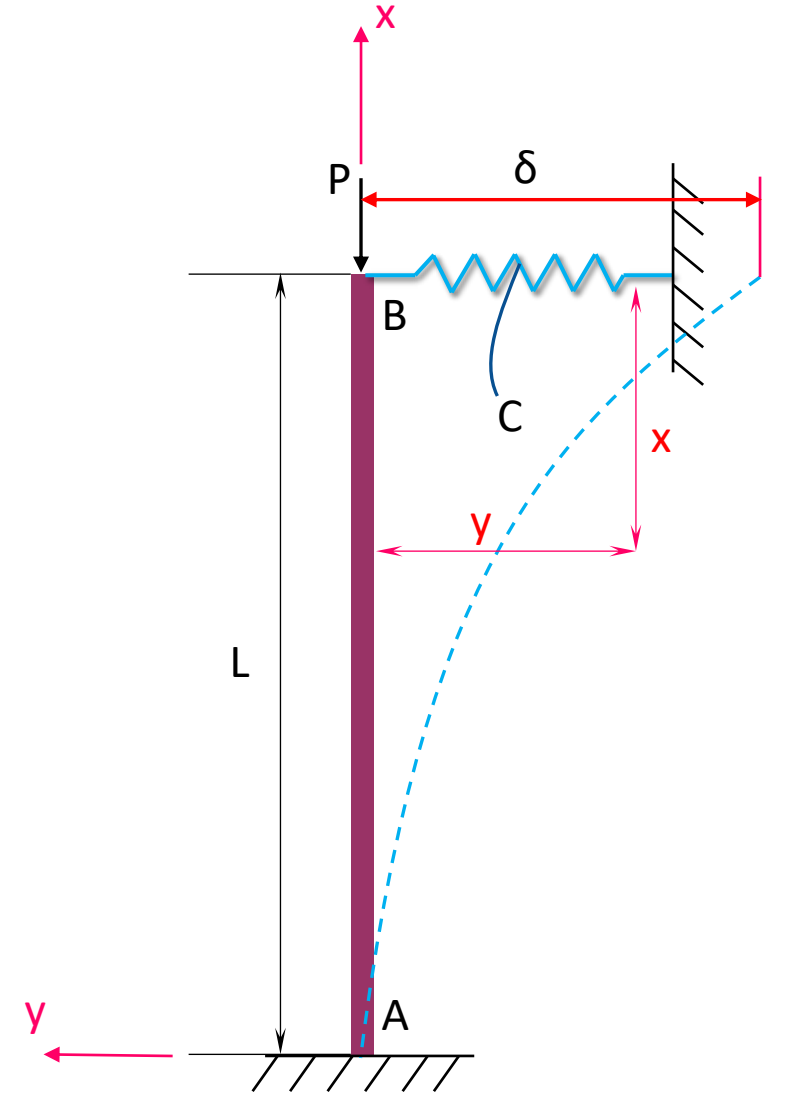
$$EIy'' = M = F_y \cdot x - (\delta - x)P \quad , \quad \frac{P}{EI} = k^2 \text{ alınır};$$

$$\text{Çözüm} \rightarrow y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4$$

Şeklinde olur ve **sınır şartları**;

$$\text{○ } x=0 \text{ için } y = 0 \text{ ve } y' = \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{○ } x=L \text{ için } y'' = 0 \rightarrow v = F_y = C \cdot \delta = C \cdot y(L)$$



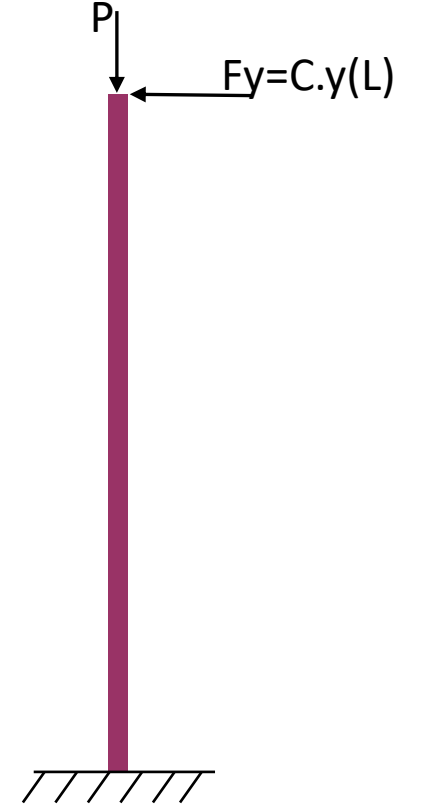
ÇÖZÜM

Dolayısıyla;

$$\frac{d^3y}{dx^3} + k^2 \frac{dy}{dx} = -[-Cy(L)] = \frac{C}{EI} y(L)$$

$$y'' = -k^2 C_1 \sin kx - k^2 C_2 \cos kx$$

$$y''' = -k^3 C_1 \cos kx + k^3 C_2 \sin kx$$



Sınır şartları;

$$\text{○ } x=0 \text{ için } y = 0 \quad \text{----->} \quad C_2 + C_4 = 0 \quad \text{(1)} \quad \text{ve} \quad y' = 0 \quad C_1 k + C_3 = 0 \quad \text{(2)}$$

$$\text{○ } x=L \text{ için } y'' = 0 \quad \text{----->} \quad -C_1 k^2 \sin kL - C_2 k^2 \cos kL = 0 \quad \text{(3)}$$

$$\text{○ } x=L \text{ için } v = C.y(L);$$

$$\text{----->} \quad -k^3 C_1 \cos kL + k^2 C_2 \sin kL + k^2 (C_1 k \cdot \cos kL - C_2 k \sin kL + C_3) = \frac{C}{EI} y(L) \quad \text{(4)}$$

ÇÖZÜM

Buradan;

$$\left. \begin{array}{l} C_4 = -C_2 \quad \text{-----} \rightarrow C_2 = -C_1 \tan kL \\ C_3 = -C_1 k \quad \text{-----} \rightarrow C_4 = -C_1 \tan kL \end{array} \right\} C_3 k^2 = \frac{c}{EI} y(L) , \rho = \frac{cL^3}{EI}$$

$$-C_3 k^3 = \frac{\rho}{L^3} y(L) , y(L) = C_1 \sin kL + C_2 \cos kL + C_3 L + C_4$$

$$\Rightarrow y(L) = C_1 \left[\sin kL - \frac{\sin kL}{\cos kL} \cos kL - kL + \frac{\sin kL}{\cos kL} \right]$$

$$\frac{C_1}{L^3} \left[\rho kL + \rho \frac{\sin kL}{\cos kL} \right] + C_1 k^3 = 0 \quad \text{-----} \rightarrow C_1 = \left[\frac{\rho \sin kL - \rho kL \cos kL + k^3 L^3 \cos kL}{\cos kL} \right] = 0$$

ÇÖZÜM

$C_1 \neq 0$ ve $kL = \theta$ denirse;

$$\rho \sin \theta - \rho \theta \cos \theta + \theta^3 \cos \theta = 0, \quad \rho \sin \theta + (\theta^3 - \rho \theta) \cos \theta = 0$$

Denkleminin çözümünden $\theta = 2,203$ bulunur.

$$P_{kr} = (2,203)^2 \frac{EI}{L^2} = \frac{0,49 \pi^2 EI}{L^2} \quad \text{Bulunur.}$$

Erdemlerimiz ve kusurlarımız
birbirinden ayrılamaz, güç ve
madde gibi. Onlar ayrıldığında
insan bir hiçtir.