

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(2,2) VE (3,3)-TÜRK SAADET DÜĞÜMLERİNİN
ÖRTÜ UZAYLARI

Ahmet KÜÇÜK

Yönetici: Doç. Dr. Mehmet Emin BOZHÜYÜK

Doktora Tezi

ÖZET

Yonca yaprağı, $(2,3)$ -Türk Düğümü ve $(2,2)$ -Türk Saadet Düğümü denilen düğümün grubunun dördüncü dereceden simetrik grup içindeki homomorfizmlerinin bir sınıflandırılması ve $n=5,6,\dots,11$ için bu düğümün n -yapraklı devirli örtü uzayları incelendi. Ayrıca $(3,3)$ -Türk Saadet Düğümü grubunun üçüncü dereceden simetrik grup içindeki homomorfizmlerinin bir sınıflandırılması yapıldı.

Bu incelemede, $(2,2)$ -Türk Saadet Düğümü' nün 4-yapraklı ve $(3,3)$ -Türk Saadet Düğümü' nün 3-yapraklı örtü uzaylarının birinci homotopi ve homoloji grupları hesaplandı.

SUMMARY

A classification of homomorfizms of the knot group of Trefoil Knot ((2,3)-Türk's Head Knot or (2,2)-Turkish Felicity Knot) in the symmetric group of degree four and the covering spaces with n -leaves of this knot is examined for $n = 5, \dots, 11$.

In addition a classification of homomorfizms of the group of (3,3)-Turkish Felicity Knot in the symmetric group of degree three is obtained.

In this examination, the first homotopy and first homology groups of these covering spaces are calculated.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı gösteren ve yardımlarını esirgemeyen kıymetli hocam Doç. Dr. Mehmet Emin BOZHÜYÜK'e teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iii
SUMMARY	iv
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
1.GİRİŞ	1
1.1. Düğüm	1
1.2. Poligonal düğüm	1
1.3. Düğümlerin denkliği	1
1.4. Reidemeister dönüşümü	2
1.5. Reidemeister hareketleri	2
1.6. Düğüm tipi	4
1.7. Düğümlenmemiş veya aşık tip	4
1.8. Paralel izdüşüm fonksiyonu	4
1.9. Geçit noktası	4
1.10. Regüler izdüşüm ve regüler pozisyon	4
1.11. Alt geçit ve üst geçit noktası	5
1.12. Normal izdüşüm	5
1.13. Alt geçit ve üst geçit	5
1.14. Almaşık düğüm	6
1.15. Düğümün yönlendirilmesi	6
1.16. İki yanlı düğüm	6
1.17. Ayna resmi	6
1.18. Tersine denk düğüm	7

	<u>Sayfa</u>
1.19. Düğümün inşası	7
1.20. Düğümün evreni	8
1.21. Düzlemsel izotopi	9
1.22. Kuşatan izotopi	9
1.23. Şematik temsili verilen halkanın birleşen sayısı	11
1.24. Halkalanma sayısı	11
1.25. Örnekler	12
1.26. Kıvrılma ve burulma sayıları	15
1.27. Düğüm diyagramının yaylarının rengi	16
1.28. Parantez polinomu	16
1.29. Almaşık halkalar	20
1.30. Berzah	23
1.31. Fiskeleme	25
1.32. Örgüler ve diyagramlar	25
2. ÖRTÜ UZAYLARI	28
2.1. Dallanmış örtü uzayı	28
2.2. Örtü uzayı	28
2.3. Tamlık	28
2.4. Yaprak sayısı	28
2.5. Dallanmış örtü uzayının tanımı	28
2.6. Singüler küme	29
2.7. Dallanma indisi	29
2.8. Dallanma mertebesi	29
2.9. Sonlu dallanma	29

	<u>Sayfa</u>
2.10. Regüler örtü uzayı	29
2.11. Fox'ın algoritması	29
3. SONUÇLAR	34
3.1. S^3 küresinin (2,2)-Türk Saadet Düğümü üzerinde dallanmış örtü uzayları	34
3.2. Örnekler	38
3.3. Yonca yaprağı düğümünün $n=5,6,\dots,11$ için n -yapraklı devirli örtü uzaylarının birinci homotopi ve homoloji grupları	45
3.4. S^3 ün (3,3)-Türk Saadet Düğümü üzerinde dallanmış örtü uzayları	48
KAYNAKLAR	52
İNDEKS	54

1. GİRİŞ

1.1. Düğüm

$f : S \rightarrow R^3$ fonksiyonu bir S çemberinin, R^3 uzayının bir alt uzayı olan $K = f(S)$ üstüne bir yerleştirme fonksiyonu (embedding) olsun. Yani, $f : S \rightarrow K$ ve $f^{-1} : K \rightarrow S$ fonksiyonları birebir üstüne ve sürekli ise, K kümesine uzayın basit kapalı bir eğrisi veya bir düğüm denir (5,7).

Burada R^3 ile (x,y,z) sıralı gerçekte sayı üçlülerinin oluşturduğu üç boyutlu Euclid uzayı ve S ile de,

$$S = \{ (x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 = r^2, z=0 \}$$

alt uzayı, yani, bir çember gösterilmiştir.

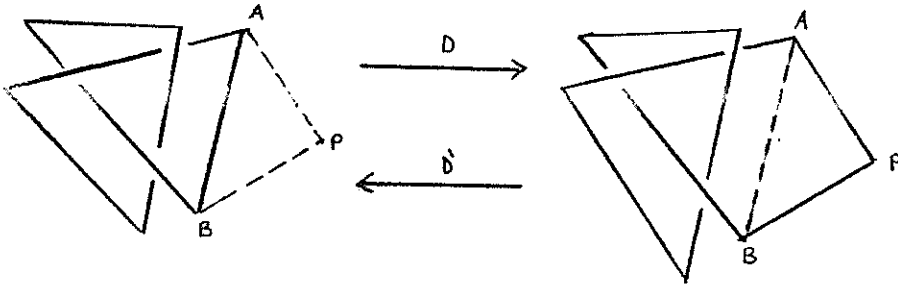
1.2. Poligonal düğüm

K uzay içinde bir düğüm olsun. Eğer, K sonlu sayıda doğru parçalarından oluşmuş ise, K ya poligonal bir düğüm denir.

1.3. Düğümlerin denkliği

$K=f(S)$ ve $L=g(S)$ uzayda iki düğüm olsun. Eğer $h(K)=L$ olacak şekilde bir $h : R^3 \rightarrow R^3$ homeomorfizmi varsa, K düğümü L düğümüne denktir denir (5).

K ve L uzayda birbirine denk iki poligonal düğüm ise, aşağıda 1.4. de verilen dönüşümün sonlu sayıda uygulanması ile K düğümünü L düğümü üzerine resmetmek mümkündür. Yani, sonlu bir düğüm dizisi $K=L_0, L_1, L_2, \dots, L_n=L$ vardır. Her $i=1, 2, 3, \dots, n$ için L_{i-1} ve L_i düğümleri birbirinden yalnız D ve D' dönüşümlerinin uygulanmasıyla fark eder (Şekil 1.1).



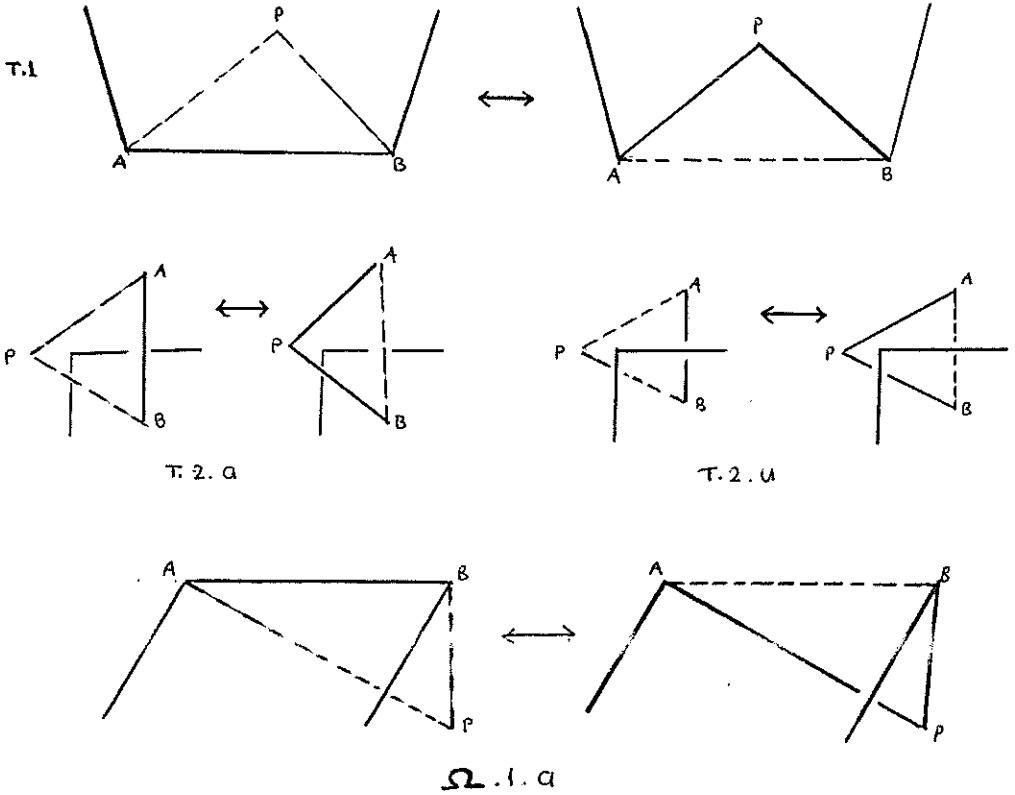
Şekil 1.1

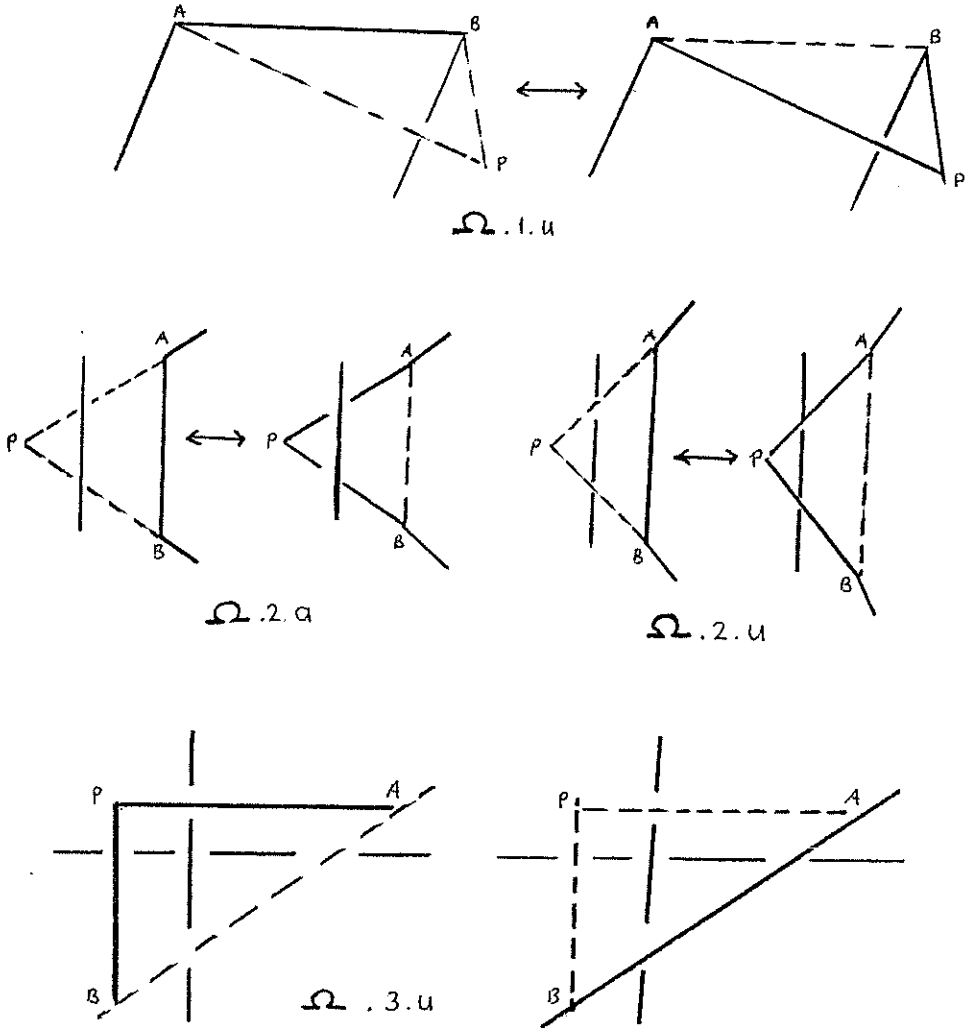
1.4. Reidemeister dönüşümü D

K uzayda poligonal bir düğüm olsun. Eğer, p noktası uzayda K'nın tümleyeninde bir nokta ve APB düzlemsel üçgen yüzeyi ile K düğümünün arakesiti yalnız AB doğru parçası ise, D dönüşümü AB doğru parçasını kaldırıp yerine AP ve PB doğru parçalarını koymaktır. Tersine, K düğümü ile APB düzlemsel üçgeninin arakesiti yalnız AP ve PB doğru parçaları ise, D dönüşümü AP ve PB doğru parçalarını kaldırıp yerlerine AB doğru parçasını koymaktır (6,17).

1.5. Reidemeister hareketleri

Yukarıda tanımlanan D ve D` dönüşümlerinin paralel izdüşüm fonksiyonu altında (x,y)- düzlemindeki görüntülerine Reidemeister hareketleri denir (5). (şekil 1.2).





Şekil 1.2. Reidemeister hareketleri

Teorem : Tanım 1.3. de verilen denklik uzayın basit kapalı eğrileri kümesinde bir denklik bağıntısıdır.

İspat : i. Her düğüm kendi kendisine denktir. Yani, K uzayda bir düğüm ise, $h(K) = K$ olacak şekilde bir $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ homeomorfizmi vardır.

ii. K düğümü L düğümüne denk ise, $h(K) = L$ olacak şekilde bir h homeomorfizmi vardır. h bir homeomorfizim ise h^{-1} de bir homeomorfizmdir. Yani, $h^{-1}(L) = K$ olur. Buradan L düğümü K düğümüne denktir.

iii. K düğümü L düğümüne denk ve L düğümünde M düğümüne denk ise, $h(K)=L$ ve $g(L)=M$ olacak şekilde h ve g homeomorfizmleri vardır. Buradan $g(h(K))=M$ olur. h ve g homeomorfizm olduklarından $g.h$ da homeomorfizmdir (1,2). Dolayısıyla K düğümü M düğümüne denktir.

1.6. Düğüm tipi

Tanım 1.3. deki denklik bağıntısı düğümler kümesini ayrık denklik sınıflarına ayırır. Herbir denklik sınıfına bir düğüm tipi denir (5,7).

1.7. Düğümlenmemiş veya aşikar tip

Bir çemberin veya onunla aynı denklik sınıfında olan bir üçgenin düğüm tipine aşikar veya düğümlenmemiş tip denir (7).

1.8. Paralel (dik) izdüşüm fonksiyonu

$p : R^3 \rightarrow R^3$, $p(x,y,z)=(x,y,0)$ ile tanımlanan fonksiyona paralel izdüşüm fonksiyonu denir.

Eğer, K uzay içinde bir düğüm ise, K 'nin p izdüşüm fonksiyonu altındaki resmine, $p(K)$ kümesine, K 'nin (x,y) -düzlemindeki izdüşümü denir. Eğer K poligonal bir düğüm ise, $p(K)$ da düzlemsel bir poligondur.

1.9. Geçit noktası

K uzay içinde poligonal bir düğüm, $p : R^3 \rightarrow R^3$ de paralel izdüşüm fonksiyonu olsun. $p(K)$ üzerinde alınan herhangi bir a noktası için eğer, a noktasının p altındaki görüntüleri ile K 'nin ortak olduğu noktaların sayısı 1 den fazla ise, yani, $|p^{-1}(a) \cap K| > 1$ ise, a noktasına $p(K)$ izdüşümünün katlı bir noktası ve $n = |p^{-1}(a) \cap K|$ sayısının da a noktasının katlılık mertebesi denir (7). $n=2$ ise, a ya geçit noktası denir.

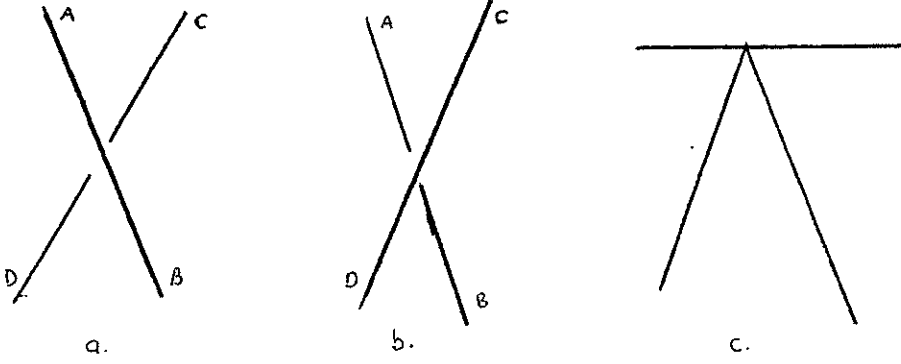
1.10. Regüler izdüşüm ve regüler pozisyon

K uzay içinde bir düğüm ve $p : R^3 \rightarrow R^3$ paralel izdüşüm fonksiyonu olsun. Eğer,

1. $p(K)$ izdüşümünün katlı noktaları yalnız sonlu sayıda iki katlı noktalar ise,

2. Hiçbir iki katlı nokta K düğümüne ait bir doğru parçasının köşe noktasının p altındaki resmi değilse, $p(K)$ izdüşümüne K düğümünün regüler izdüşümü denir (7).

Eğer $p(K)$ izdüşümü regüler ise, K düğümü uzayda regüler pozisyonadadır. İki katlı noktalar AB ve CD gibi iki kenarın izdüşürülmesinden oluşur. Şekil 1.3 c deki kavşak yasaklanmıştır.



Şekil 1.3.

1.11. Alt geçit ve üst geçit noktası

K uzayda regüler pozisyonda bir düğüm ve a noktası $p(K)$ izdüşümü üzerinde bir katlı nokta olsun. Bu durumda a noktası K düğümüne ait iki noktanın resmidir. Bu noktalardan z -koordinatı büyük olana üst geçit noktası, z -koordinatı küçük olanada alt geçit noktası denir (7).

1.12. Normal izdüşüm

Regüler pozisyonda bulunan bir K düğümü ile küçük bir r pozitif sayısı gözönüne alınsın. A_r ile K düğümüne ait ve K düğümünün her alt geçit noktasından uzaklığı r den küçük olan noktaların oluşturduğu doğru parçalarını gösterelim. O zaman $p(K-A_r)$ kümesine K düğümünün normal izdüşümü denir.

1.13. Alt geçit ve üst geçit

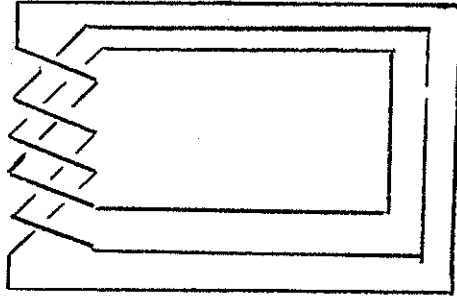
K uzayda regüler pozisyonda bir düğüm ve x $p(K)$ üzerinde bir iki katlı nokta olsun. x noktasına ait olan üst geçit noktasını taşıyan doğruya x 'e ait üst geçit denir. Yine x 'e ait alt geçit noktasından r uzaklığında bulunan iki doğru parçasınada x noktasına ait alt geçitler denir.

Herhangi iki katlı nokta için üst geçit olan doğru parçası diğer bir iki katlı nokta için alt geçit olabilir.

1.14. Almaşık düğüm

K uzayda regüler pozisyonda bulunan bir düğüm olsun. Eğer, K düğümüne ait olan alt ve üst geçit noktaları K düğümü üzerinde almaşık olarak yer alıyorsa, K düğümüne almaşık düğüm denir (9).

($2, 2n-1$)-Tor düğümleri dışındaki bütün tor düğümleri almaşık değildir (şekil 1.4)..



Şekil 1.4. (3,4)-Tor düğümü

1.15. Düğümün yönlendirilmesi

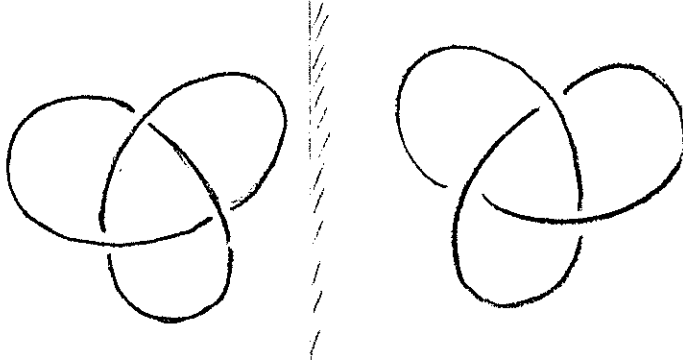
Bir düğüm üzerine ok konulmak suretiyle yön tayin edilmiş ise, düğüm yönlendirilmiştir denir.

1.16. İki yanlı düğüm

K uzayda bir düğüm olsun. Eğer uzayın yönlendirmeyi tersine çeviren bir eşyapı dönüşümü $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ altında $h(K) = K$ ise, K düğümüne iki yanlı denir (5,7).

1.17. Ayna resmi

$r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(x,y,z) = (x,y,-z)$ ile tanımlanan yansıma fonksiyonu altında bir düğümün resmine o düğümün ayna resmi denir. Şekil 1.5 de yonca yaprağı düğümünün ayna resmi görülmektedir (7).



Şekil 1.5 .

Teorem : Herhangi bir K düğümünün iki yanlı olabilmesi için gerek ve yeter şart, uzayda yönlendirmeyi koruyan bir eşyapı dönüşümü altında K nın kendi ayna resmi üzerine resmedilebilmesidir.

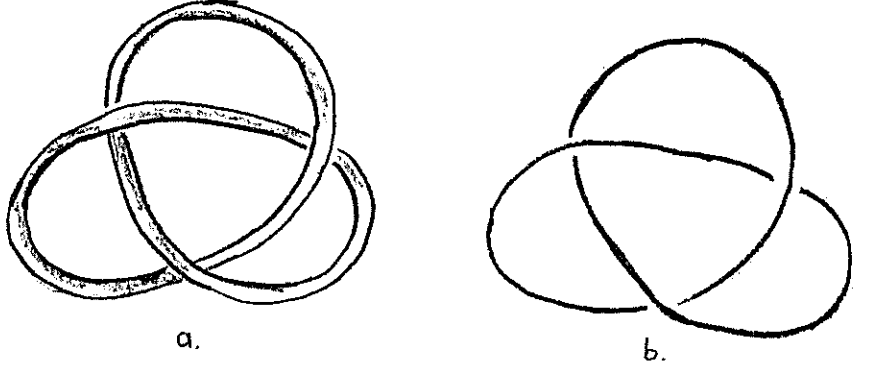
İspat (5,7).

1.18. Tersine denk düğüm

K uzayda bir düğüm olsun. Eğer uzayın yönlendirmeyi koruyan $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibi bir eşyapı dönüşümü varsa ve onun K ya kısıtlanması K nın yönlendirmesini tersine çeviriyorsa K düğümüne tersine denktir denir (7).

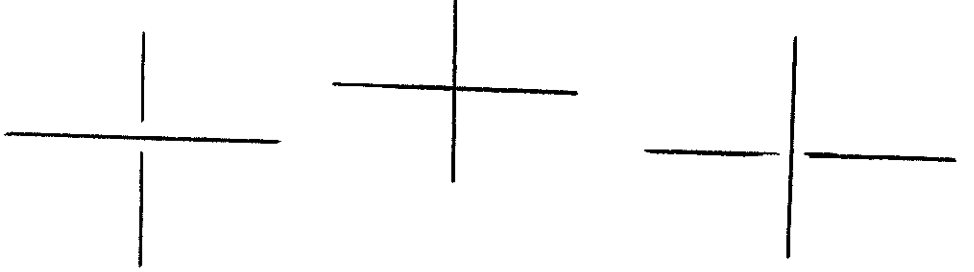
1.19. Düğümün inşası

Üç boyutlu uzayda düğümlerin nasıl yapılabileceğini düşünerek başlayalım. Şekil 1.6 yonca yaprağı düğümünün iki canlandırılmasını gösterir. Şekil 1.6 a yonca yaprağı düğümünün üç boyutlu uzayda gerçeğe uygun olarak kalınlık, yoğunluk, sürtünme ve diğer fiziksel özellikleri taşıyacak şekilde fiziksel bir boru gibi resmedildi. Şekil 1.6 b de ise geçit noktalarında çakışan, üç süreklili düzlemsel parça ihtiva eden şematik bir temsil vardır. Bu şematik temsil bir diyagramatik teoremin inşasına izin verir.



Şekil 1.6

Böylece 4-değerli bir çizgeye, düğüme ilave bir yapı gibi bakacağız. Böyle bir çizgenin herbir köşesi şekil 1.7de gösterilen şekle sahiptir.



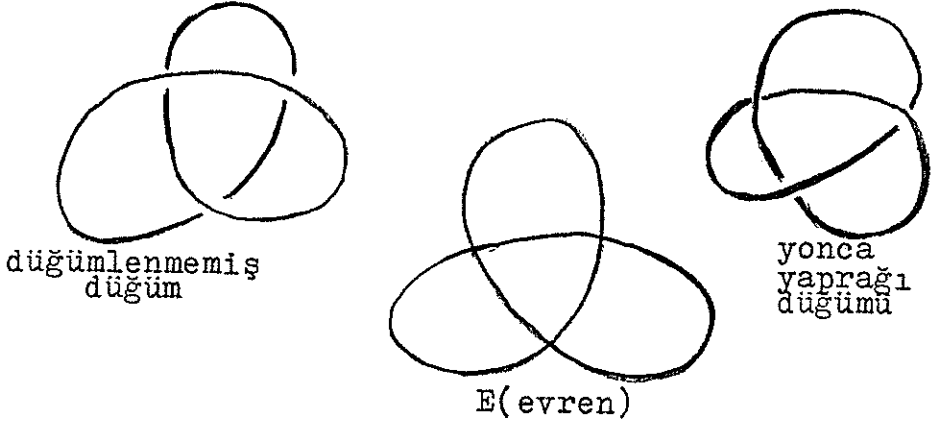
Şekil 1.7

Bir kavşağa iliştirilen geçitin iki şekli

1.20. Düğümün evreni

K uzayda regüler pozisyonda bir düğüm olsun. K nın paralel izdüşüm fonksiyonu altında düzlemdeki izdüşümüne K nın evreni adı verilir (14).

Şekil 1.8de yonca yaprağı düğümü ile düğümlenmemiş bir düğümün evreni görülmektedir.

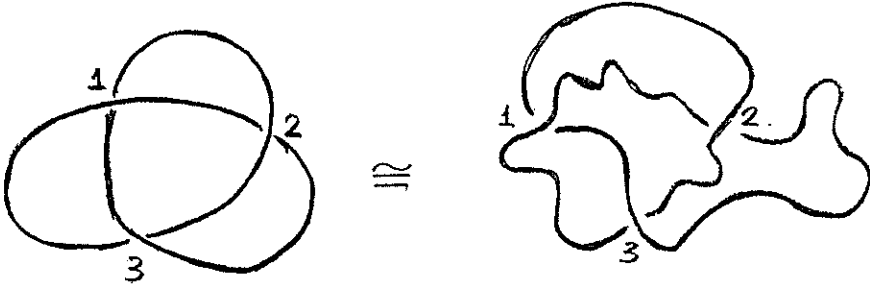


Şekil 1.8

Yukardaki tanıma göre n köşeli bir evren 2^n tane düğümün evreni olabilir. Bunların bir çoğu düğümlememiş olabilir.

1.21. Düzlemsel izotopi

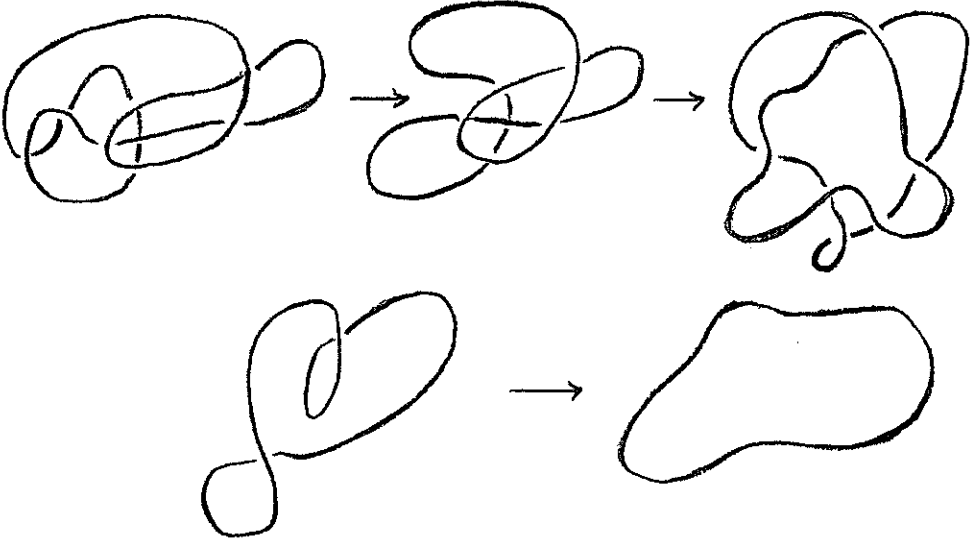
Diyagram düzleminde şematik bir temsili verilen bir düğümün şematik yapısını koruyan bir harekete düzlemsel izotopi denir (14)(şekil 1.9).



Şekil 1.9 Düzlemsel izotopi

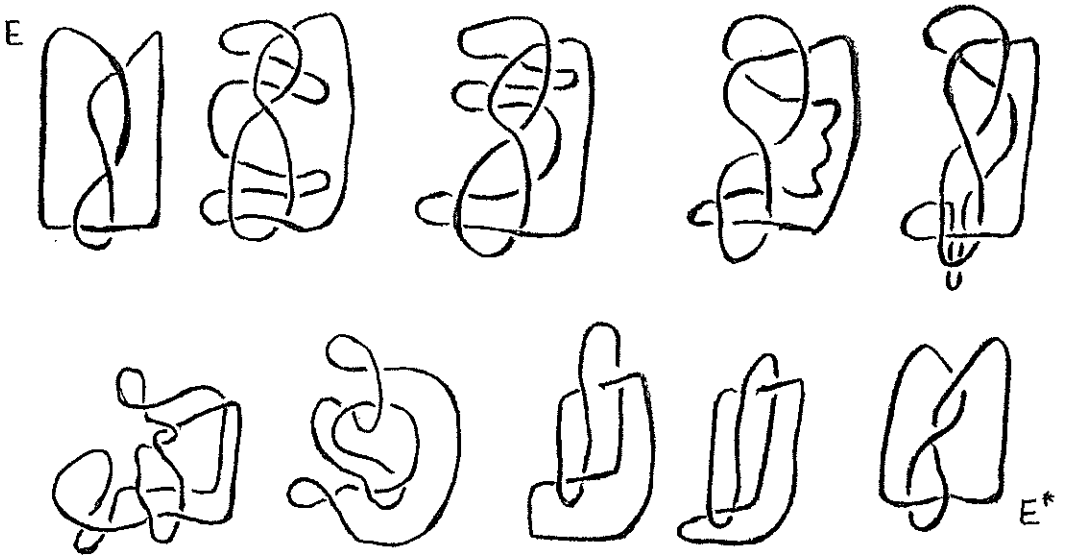
1.22. Kuşatan izotopi

İki düğüm arasında düzlemsel denklikler ve Reidemeister hareketlerinin bir dizisine kuşatan izotopi denir. Şekil 1.10 da düğümlememiş düğüme (çembere) ait bir kuşatan izotopi gösterildi (14).



Şekil 1.10 Kuşatan izotopi

Aşağıdaki şekil 1.11de sekiz şekilli düğümün kuşatan izotopi yardımıyla, ayna resmine denk olduğu gösterildi (14).



Şekil 1.11

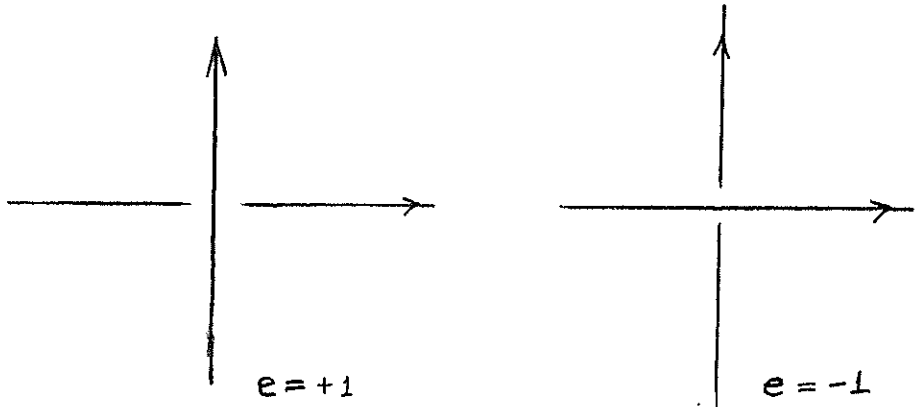
Yukardaki son iki dönüşümün düzlemsel izotopi hareketi olduğuna dikkat ediniz.

1.23. Şematik temsili verilen bir halkanın birleşen sayısı Düğüm teorisinde istenen şeylerden biriside denkolmayan düğümleri ayırt etme metodlarıdır. Karışık bir düğüm diyagramında, düğüm üzerinde bir nokta seçilerek ve diyagram boyunca aynı noktaya gelinceye kadar geçitlere geldikçe onları atlayarak birleşenlerin sayısını belirtebiliriz. Herbir birleşen bu yolla elde edilmiş bir tam devirdir. Bu tam devirlerin sayısına halkanın birleşen sayısı denir. Denklik yolu ile birleşenlerin sayısının değiştirilememesi Ridemeister hareketlerinin bir neticesidir.

Böylece birleşen sayısı düğümler için bir sabittir. Bununla beraber tek başına kuvvetli bir sabit değildir (14).

1.24. Halkalanma sayısı

İki eğrinin birbiri etrafında nasıl sarıldığıнын bir ölçüsünü verir. Halkalanma sayısını tanımlamak için yönlendirme ile birlikte işaret kavramında ihtiyaç vardır. Daha önce de tanımlandığı gibi, bir halkaya, eğer onun birleşen yayları üzerine ok konulmak suretiyle bir yön tayin edilmiş ise, yönlendirilmiştir denir. Şekil 1.12de gösterildiği gibi yönlendirilmiş geçitlere $e(p)=\pm 1$ işaretleri verilir.



Şekil 1.12 Geçitlerin işaretlenmesi

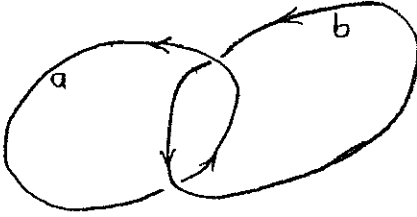
Birleşenleri a ve b olan iki birleşenli bir halka verilsin a birleşeni ile b birleşeninin geçitlerinin kümesini $a \cap b$ ile gösterelim. a veya b nin kendi kendileriyle yaptıkları geçitler bu küme içerisinde değildir. Bu durumda a ve b nin halkalanma sayısı

$$lk(a,b) = 1/2 \sum_{p \in a \cap b} e(p)$$

formülüyle bulunur (14).

1.25. Örnekler

Örnek 1.



$$lk(a,b) = 1/2(1+1) = 1$$

Şekil 1.13

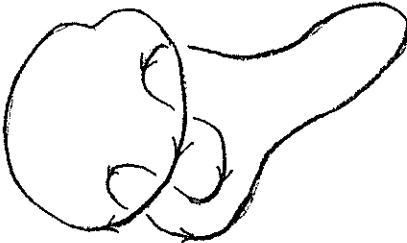
Örnek 2.



$$lk(a,b) = 1/2(-1-1) = -1$$

Şekil 1.14

Örnek 3.



$$lk(a,b) = 1/2(-1+1-1+1) = 0$$

Şekil 1.15

Teorem : Halkalanma sayısı bir sabittir.

İspat : Yukardaki şekillerden görüldüğü gibi , Reidemeister hareketleri yardımıyla halkalanma sayısının bir sabit olduğu hemen anlaşılır. Çünkü II. tip Reidemeister hareketleri halkalanma sayısına bir +1 ve bir -1 ilave eder. I. tip Reidemeister hareketleri halkalanma sayısına bir katkıda bulunmaz. III. tip hareketlerde toplamı değiştirmez.

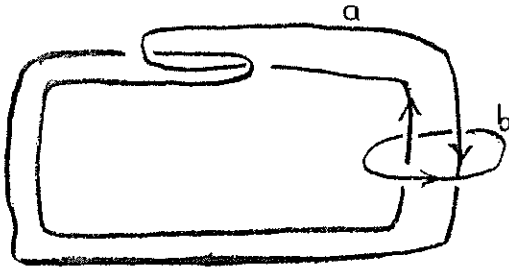
Böylece yukardaki 1. ve 2. örnek, Şekil 1.16'da görüldüğü gibi en basit halkanın gerçekten halkalanmış olduğunu ispatlamak için yeterlidir. Çünkü ona hangi yönlendirmeyi verirsek verelim, bu halkanın halkalanma sayısı sıfır değildir.



Şekil 1.16

Ters örnek (18,s 65-66) şekil 1.17 de verildi.

Örnek 4.

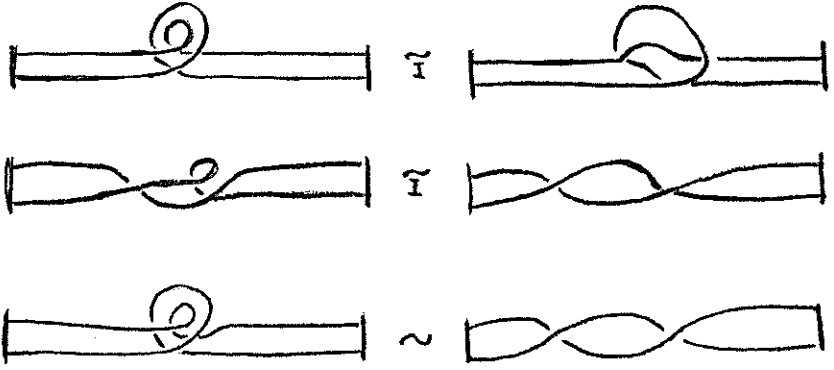


$$lk(a,b)=1/2[(1+1)-(1+1)]=0$$

Şekil 1.17

Bu halkaya Whitehead halkası denir (18). Whitehead halkası halkalanmış olduğu halde halkalanma sayısı sıfırdır.

Örnek 5.



Böylece,



Şekil 1.18

olur. Yani uç noktalar hareket ettirilmeksizin yukardaki denklik bulunur. Bu bilinen bir olaydır. Onu bir kemer ile tasvir etmek mümkündür (şekil 1.19) (Kemerin kenarları iki yay oluşturur).



Şekil 1.19

Eğer kemerin kenarları aynı yönde yönlendirilirse, her iki şekilde de halkalanma sayısı aynı olacaktır.



$$lk(a,b) = 1/2(-1-1) = -1$$

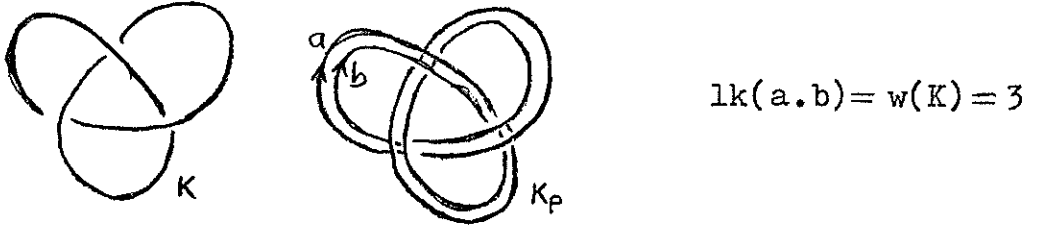


$$lk(a,b) = 1/2(-1-1) = -1$$

Şekil 1.20

Daha karmaşık bir halkanın halkalanma sayısını bulmada bu gözlem kullanılabilir.

Gerçekten bir düğüme bir paralel tel eklenerek bir düğüm diyagramından elde edilen bir halkanın halkalanma sayısı daima bulunabilir (şekil 1.21).



Şekil 1.21

1.26. Kıvrılma ve burulma sayıları

K düğümünün geçit işaretlerinin toplamına eşit bir halkalanma sayısı $w(K)$ ile gösterildi. Buna K düğümünün kıvrılma sayısı adı verilir.

$w(K)$ kıvrılma sayısı I. tip Reidemeister hareketi altında ± 1 değiştiğinden K düğümünün bir sabiti olması gerekmez. Fakat K ya paralel çizilerek elde edilen K_p halkası için $w(K_p)$ bir sabit olur (şekil 1.22).



Şekil 1.22

K_p nin kıvrılma sayısına $w(K)$, tellerin burulma sayısına da $T(K_p)$ dersek, bu takdirde burulmuş tellerin oluşturduğu K_p halkaları için

$$lk(K_p) = w(K) + T(K_p)$$

formülü elde edilir (14).

Burulmuş teller için halkalanma sayısı, kıvrılma ve burulmanın toplamıdır. Bu formül kapalı paralel (burulmuş) tellerin halkaları için bir çeşit korunum kanunu olarak kabul edilebilir. Ne $w(K)$ ve ne de $T(K_p)$ tek başına topolojik sabitler değildir. Fakat kıvrılma ve burulmanın toplamı bir topolojik sabittir. Bu sabit kapalı iki-telli DNA'nın geometrisini anlamaya yardım etmekte kullanılır (10,21).

1.27. Düğüm diyagramının yaylarının rengi

Bir K düğümünün yayları farklı reklere boyansın. Verilen herhangi bir kavşakta ya üç farklı renk görünür, yada yalnız bir renk görünür. Renkleme sayısının farklı olması diyagramda her bir renge karşılık gelen yayların bulunmasıyla mümkündür. Üç renklilik Reidemeister hareketleri altında korunur (14).

Yonca yaprağı düğümü üç renkli olduğundan ve düğümlememiş düğüm üç renkli olmadığından, yonca yaprağı düğümü düğümlemişdir. Bundan dolayı üç renklilik bir düğümün topolojik sabitidir.

1.28. Parantez polinomu

Yönlendirilmiş halka diyagramları üzerinde bir üç değişkenli polinom tanımlanabilir.

$[K] \in \mathbb{Z}[A, B, d]$, yerdeğişebilen A, B ve d değişkenleri cinsinden karşılık gelen polinomu gösterecektir. Bu polinom aşağıdaki aksiyomları sağlar (14).

$$1. \left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] = A \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] + B \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right]$$

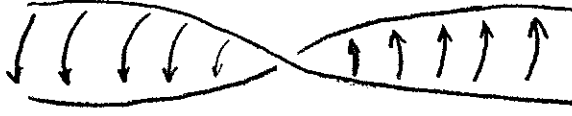
$$\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] = B \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] + A \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right]$$

$$2. \left[\bigcirc \right] = d \left[\bigcirc \right]$$

$$\left[\bigcirc \right] = d$$

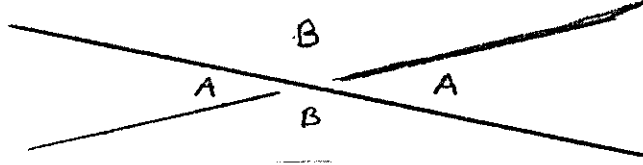
Bu aksiyomların açıklaması şöyledir : İlk önce dikkat edinizki yönlendirilmiş bir geçit, köşesine değen dört bölgeden ikisini ayırır. Bu şöyle yapılır. Üst geçit doğrusu

saat yönünün ters istikametinde, üst geçit alt geçit üzerine gelinceye kadar döndürülür. Bu suretle taranan iki bölge seçilir (şekil 1.23).



Şekil 1.23

Bu şekilde elde edilen iki bölge sırayla A ve B ile isimlendirilir (şekil 1.24).



Şekil 1.24

(1) de verilen formülden,

$$\left[\begin{array}{c} B \\ A \end{array} \right] = A \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] + B \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \quad (1)$$

yazılır. Bu denklemdeki geçitler onları ihtiva eden daha büyük diyagramları temsil eder. Böylece \times , \simeq ve \succ başka suretle özdeş olan diyagramların kısımları olarak farzedilir. Bu anlamda (1) formülü birçok özel formülleri temsil eder. Mesala,

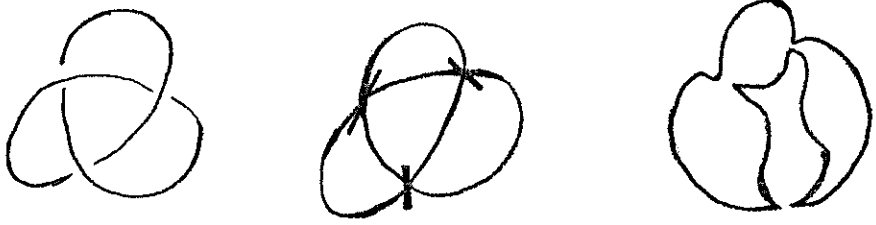
$$\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] = A \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] + B \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right]$$

olur. İkinci eşitlik diyagramdaki herhangi bir yere fazladan ayrık bir çemberin yerleştirilmesi d ile parantezin çarpımını gösterir (14).

Açıkça bu aksiyomlar basit kapalı eğri ailelerinin değerlendirilmesi için sürekli genişlemelerle $[K]$ nın tekrarlı bir hesabına sevk eder. $[K]$ nın iyi tanımlı olduğunu görmek için K altında bulunan U evren kümesinin S durumları üstünde bir toplam olarak onu yeniden formüle etmek yeterlidir.

K düğümünün evreni U olsun. U nun bir S durumu U nun herbir köşesi için ayrışmanın bir seçimidir. Böyle bir seçim köşeli bir işaretleyici ile belirtilir. Şekil 1.25 de yonca yaprağı düğümünün evreninin bir durumu ve onun karşılık gelen ayrışımı görülmektedir.

Bir S durumu verilsin. $|S|$, S nin içindeki birleşenlerin sayısını gösterebilir. S içinde açılan A-kanalların sayısı $i_k(S)$, B-kanalların sayısında $j_k(S)$ ile gösterilsin. Mesela şekil 1.25 de $i_k(S)=2$, $j_k(S)=1$ dir.



Şekil 1.25 $i_k(S)=2$, $j_k(S)=1$

Lemma 1 : $[K] = \sum_S A^{i_k(S)} \cdot B^{j_k(S)} d^{|S|}$ olur (14).

Bu formül (1) ve (2) aksiyomlarından hemen çıkar ve diyagramlar üzerinde paramter için bir tek değer verir.

Şimdi şu soru akla gelir. A, B ve d üzerinde hangi kısıtlamalar altında $[K]$ düğümler ve halkalar için bir topolojik sabit olur? Bu soruya aşağıdaki lemma cevap verir (14).

Lemma 2 : $[\text{D}]=AB[\text{C}]+(ABd A^2 B^2)[\text{E}]$ dir

İspat : $[\text{D}] = A[\text{F}] + B[\text{G}]$
 $= A^2[\text{H}] + AB[\text{I}] + BA[\text{J}] + B^2[\text{K}]$
 $= AB[\text{L}] + (A^2 + ABd + B^2)[\text{M}]$

olur. Böylece, $AB=1$ ve $d=-A^2-B^2$ ile ikinci Reidemeister hareketleri altında $[\text{D}]=[\text{C}]$ Sabitliğini elde ederiz.

Lemma 3 : $[\text{D}]=[\text{C}]$ ise, bu takdirde III. tip hareketler altında da $[]$ bir sabittir.

Lemma 5 : $f_k(t^{-1/4}) = v_k(t)$ dir.

İspat : $\langle \mathcal{X} \rangle = A \langle \mathcal{Y} \rangle + A^{-1} \langle \mathcal{Z} \rangle$ ()

$$\langle \mathcal{Y} \rangle = A^{-1} \langle \mathcal{Z} \rangle + A \langle \mathcal{X} \rangle$$

$$A \langle \mathcal{X} \rangle = A^2 \langle \mathcal{Y} \rangle + \langle \mathcal{Z} \rangle$$

$$A^{-1} \langle \mathcal{Y} \rangle = A^{-2} \langle \mathcal{Z} \rangle + \langle \mathcal{X} \rangle$$

$$A \langle \mathcal{X} \rangle - A^{-1} \langle \mathcal{Y} \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle \mathcal{Z} \rangle$$

$$A a \langle \mathcal{X} \rangle + a^{-w(\mathcal{X})} - A^{-1} a^{-1} \langle \mathcal{Y} \rangle + a^{-w(\mathcal{Y})} = (A^2 - A^{-2}) \langle \mathcal{Z} \rangle + a^{-w(\mathcal{Z})}$$

$$A a f \mathcal{X} - A^{-1} a^{-1} f \mathcal{Y} = (A^2 - A^{-2}) f \mathcal{Z}, \quad (f_k = a^{-w(k)} \langle k \rangle)$$

$$-A^+ f \mathcal{X} + A^{-+} f \mathcal{Y} = (A^2 - A^{-2}) f \mathcal{Z}$$

$A = t^{-1/4}$ olsun. Bu durumda,

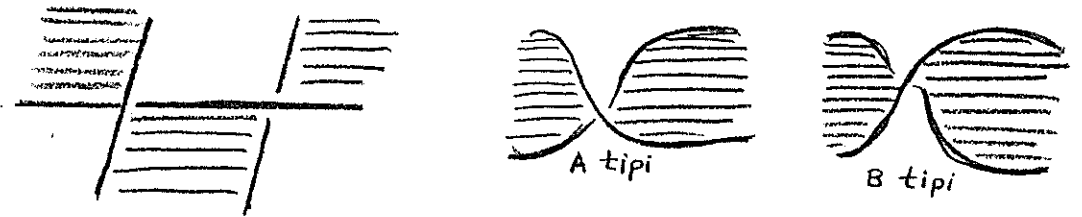
$$t^{-1} f \mathcal{X} - t f \mathcal{Y} = (\sqrt{t-1} \sqrt{t}) f \mathcal{Z}$$

olur.

1.29. Almaşık halkalar

Almaşık düğümlerin ve halkaların bazı izahıgüç özelliklerini anlatmak için parantez polinomu kullanılabilir. Eğer, bir halka diyagramı boyunca gidildiğinde geçitler ardışık olarak bir alt bir üst ise, buna almaşık diyagram denir. Almaşık diyagrama sahip halkaya almaşık halka adı verilir (tanım 1.14. le karşılaştır).

Aşağıdaki şekil 1.26 gözönüne alınırsa şu görülebilir. Bir almaşık düğüm veya halka için diyagramın bir dama tahtası taramasında her bir geçitte taranmış bölgeler aynı tiptir. (Burada A ve B parantez polinomunu tanımlamak için kullanılan aynı ayırımıdır). Bu diyagram için altta yatan evrenin bağlantılı olduğu farzedilir.

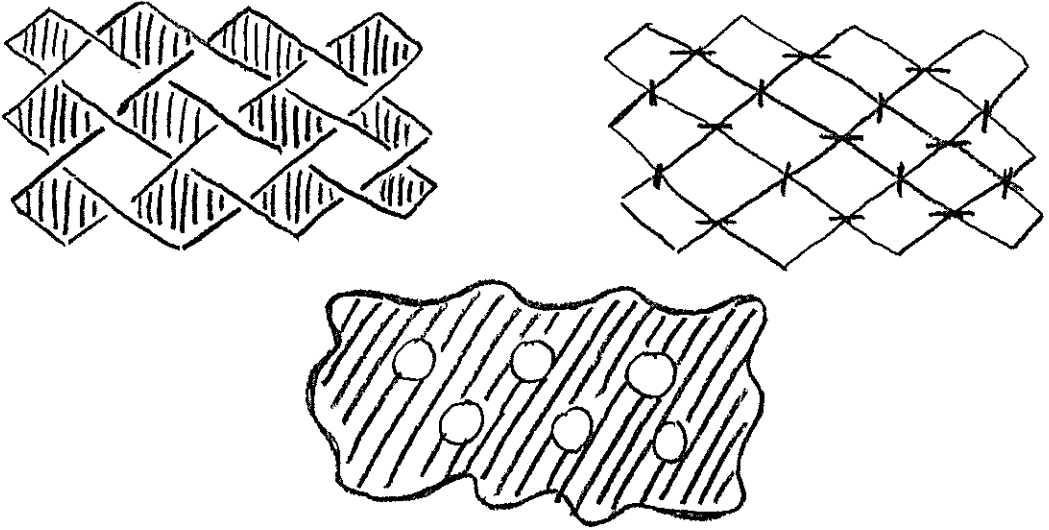


Şekil 1.26

Bu gözlem $\langle K \rangle$ daki en yüksek dereceli terimi tahmin etmek için kullanılır.

$$\langle K \rangle = \sum_S A^{ik(S)} \cdot A^{-jk(S)} \cdot d^{|S|-1}$$

olduğunu hatırlayınız. Burada şu tahmin yapılabilir. En yüksek derece işaretleyicilerin hepsinin A-kanalları açtığı S durumu ile verilir. Böyle bir durum $A^v d^{|S|-1}$ şeklinde bir terim verecektir. Burada v, K diyagramındaki köşelerin sayısıdır. Dama tahtası gözlemi gösterirki almasıık düğümler ve halkalar durumu olan bu S, A-kanal durumu w birleşene sahiptir ($|S|=w$). Burada w beyaz bölgelerin sayısıdır. Bütün A-kanalları siyaha boyalıdır (şekil 1.27). Burada $v=17$, $w=7$, $B=12$, $R=7+12=19=v+2$, $S=w=7$ dir.



Şekil 1.27

$S=w$ olduğu tam olarak görülebilir. Çünkü bütün taralı ge-
çitler ayrılabilir ve taralı bölgeyer bir büyük taralı böl-
ge halinde birleştirilebilir. Bu bölgenin sınır bileşenle-
ri beyaz bölgenin sınırındır. Böylece S, şu terimi verir.

$$A^v d^{w-1} = A^v (-A^2 - \bar{A}^2)^{w-1}$$

Buradan şu teorem ifade edilebilir.

Teorem 1 : K , kısaltılmış almaşık diyagram olsun. $\langle K \rangle$ cinsinden en yüksek dereceli terim,

$$\maxdeg \langle K \rangle = V+2(w-1)$$

formülüyle verilen dereceye sahiptir.(14).

V diyagramdaki geçit sayısını, w da A tipi geçitlere karşılık gelen taranmış bölge sayısını gösterir. Bu terim $\langle K \rangle$ içinde ± 1 e eşit bir katsayıya sahiptir. Minimum dereceli terimin katsayıları da ± 1 dir ve derecesi,

$$\mindeg \langle K \rangle = -V-2(B-1)$$

dir. Burada B , taralı bölgelerin sayısıdır.

İspat : S bir A -kanal durumu olsun. S nin işaretlerinin bir alt kümesini alt üst etmek suretiyle S den diğer herhangi bir S' durumu elde edilebilir. Herhangi bir S' durumu için

$$\langle K/S' \rangle = A^{ik(S')} \cdot B^{jk(S')} d^{|S'|-1}$$

bağıntısı bu durumun parantez toplamına katkısını gösterebilir. ($B=A^{-1}$, $d=-A^2-A^{-2}$). Böylece,

$$\langle K \rangle = \sum_{S'} \langle K/S' \rangle$$

olur. Şimdi aşağıdaki gerçekler ispatlanabilir.

i. Bir B -kanal işaretleyicisini bir A -kanal işaretleyicisiyle değiştirmek suretiyle S'' den S' elde edilmiş ise, bu takdirde

$$\maxdeg \langle K/S' \rangle \leq \maxdeg \langle K/S'' \rangle$$

olur. S' , S'' den daha az birleşene sahip olduğu zaman eşitsizlik kesindir.

ii. Eğer, S' , bir değiştirme ile A -kanal durumundan elde edilmiş ise, $|S'| = |S| - 1$ olur.

$$\langle K/S'' \rangle = A^x d^{|S'|-1}$$

olduğu için i. iddia aşıkardır. Bu takdirde

$$\langle K/S^{\setminus} \rangle = A^{x-2} d |S^{\setminus}| - 1$$

olur. Buradan,

$$\maxdeg \langle K/S^{\setminus} \rangle = \maxdeg \langle K/S^{\setminus} \rangle$$

bulunur. Eğer $|S^{\setminus}| = |S^{\setminus}| - 1$ ise, bu takdirde

$$\langle K/S^{\setminus} \rangle = A^{x-2} d |S^{\setminus}| - 1 - 1$$

olur. $d = -A^2 - A^{-2}$ yi kullanarak

$$\maxdeg \langle K/S^{\setminus} \rangle = \maxdeg \langle K/S^{\setminus} \rangle - 4$$

bulunur. Bu i. iddiayı doğrular.

ii. iddia diyagramda aşağıda tanımlanan berzahın bulunmaması hipotezinin bir sonucudur. Çünkü $|S^{\setminus}| = |S| + 1$ farzedilebilir. Değişmiş işaretleyicide S^{\setminus} 'nün birleşenlerinin biri boyunca düğümü izleyerek başlayalım. S durumunun inşasından dolayı bu izleme düğüm diyagramının bir kısmının veya bütününün etrafını çevirecektir. Eğer, $|S^{\setminus}| = |S| + 1$ ise, bu takdirde değişmiş işaretleyicinin yerinde ($\rangle \langle$) gibi iki köşe S nin ayrılmış birleşenlerinin üstünde bulunacaktır. Böylece diyagramın bir kısmı çevrelenmiş olur. Bu yerin bir berzah olduğu gösterilebilir. Bu bir çelişkidir. Böylece

$$|S^{\setminus}| = |S| - 1 \text{ ve } \maxdeg \langle K/S^{\setminus} \rangle = \maxdeg \langle K/S \rangle$$

olur. Buradan

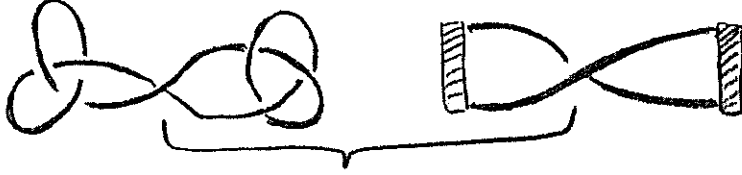
$$\maxdeg \langle K \rangle = \maxdeg \langle K/S \rangle = V \ 2(w-1)$$

çıkar (14).

1.30. Berzah

Geçitte bulunan dört lokal bölgenin herhangi ikisi bütün diyagramdaki aynı bölgenin parçaları ise, bu geçite bir berzah denir (14).

Eğer bir diyagram berzah denen hiçbir geçite sahip değilse basitleştirilmiş bir diyagramdır (şekil 1.28).



Berzah

Şekil 1.28

Teorem (Kauffman-Murasugi-Thistlethwaite) : Bir L halkasının veya düğümünün almışık izdüşümündeki geçitlerin sayısı, L nin bir topolojik sabitidir (14, 16, 19).

İspat : $\text{Span}(L)$, $\langle L \rangle$ nin maksimal ve minimal dereceleri arasındaki farkı belirtsin. $f_L = a^{-w(L)}$, L nin bir kuşatan izotopi sabiti olduğundan, $\text{span}(L)$ nin de bir kuşatan izotopi olduğu kararına varılır. Teorem 1 den,

$$\text{maxdeg } \langle L \rangle = V+2(w-1)$$

$$\text{mindeg } \langle L \rangle = -V-2(B-1)$$

olduğundan,

$$\text{Span}(L) = V+2(w-1) - [-V-2(B-1)] = 2V+2(w+B-2)$$

olur. Diğer yandan, $R=w+B=V+2$ olduğundan

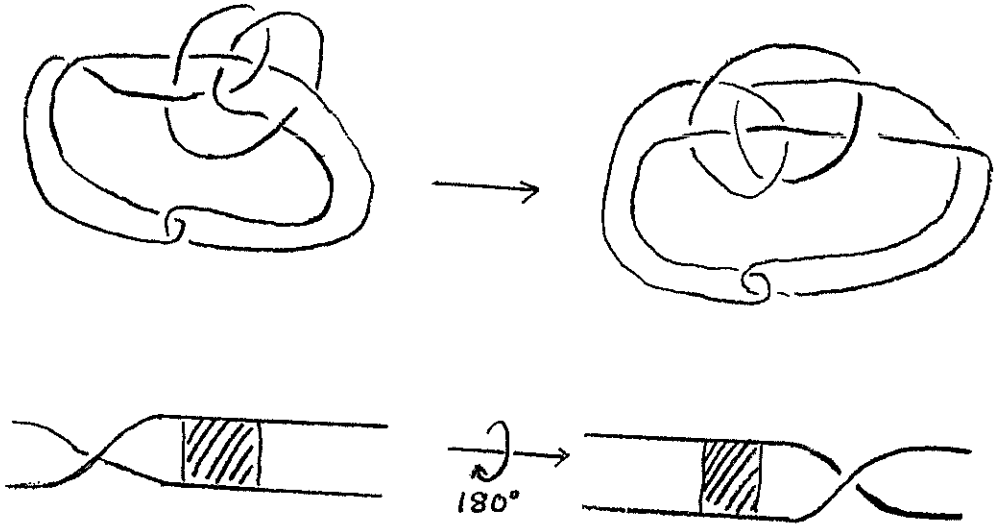
$$\text{Span}(L) = 2V+2(V-2) = 4V$$

olur. Bu sonuç geçen yüzyılın sonunda, Tait ve Little tarafından oluşturulan düğüm tablolarının orjinal derlemelerine giden düğümler ve halkalar hakkındaki klasik tahminlerden birisidir. Onlar yine indirgenmiş bir almışık düğümün izdüşümünün minimal olduğunu tahmin ettiler. Şu anlamda; O , halkanın veya düğümün herhangi izdüşümünün geçitlerinin en az sayısına sahip olduğunu verir. Görüleceği gibi buda doğru-

dur. Bunun ötesi Tait'in fiskeleme tahminidir. Bu tahmin kuşatan izotopi farkıyla bir halkanın herhangi iki indirgenmiş almaşık izdüşümünün aşağıda tanımlanan fiskeleme ile birbirinden elde edilebileceğini ifade eder.

1.31. Fiskeleme

İki giriş iki çıkışlı bir dolaşık üzerinde (şekil 1.29) dolaşığın 180° döndürülmesinden elde edilen bir harekete fiskeleme denir (buna I. Reidemeister hareketi de denir (17)). M. Thistlethwaite, indirgenmiş almaşık diyagramlar için $w(K)$ nın bir kuşatan izotopi sabiti olduğunu ispat etmiştir. Bu ispatta, Brandt, Lickorish-Millett-Ho'nun iki değişkenli polinomunun Louis, H. Kauffman tarafından genişletilmesini kullanmıştır.



Şekil 1.29 Fiskeleme hareketi

1.32. Örgüler ve diyagramlar

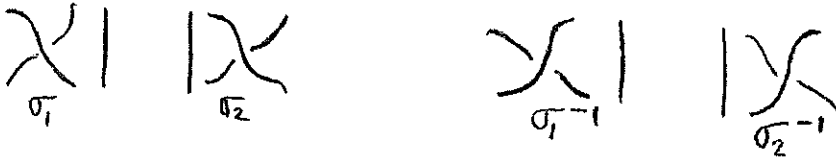
Örgülerin durumu parantez işleminin bir özelleştirmesi olarak gözönüne alınabilir. n -telli bir B_n örgü grubu aşağıdaki bağıntılarla verilir ve $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ (veya onların tersleri) elamanları tarafından doğurulur.

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

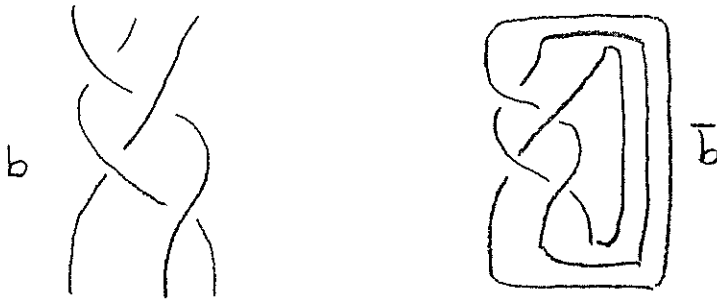
$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i-j| > 2$$

Bu diyagramların ve bağıntıların anlamı şekil 1.30 dan anlaşılacaktır. Bir örgü bir düzlemin n noktasından aşağı, o düzleme paralel bir düzleme kadar giden, düğümlenmemiş tellerin bir kümesidir.

Teller düzenli bir şekilde biri diğeri etrafında baştan aşağı dolanır. Bir $b \in B_n$ örgüsü verilsin. Onun \bar{b} kapanışı üst sıradaki n noktanın ona karşılık gelen alt sıradaki noktalara yapıştırılmasıyla elde edilmiş düğüm veya halkadır. Tanımdan bir örgü üzerindeki parantezin değeri örgünün kapanışı üzerindeki değeridir. Yani $\langle b \rangle = \langle \bar{b} \rangle$ dir. b_1, b_2 örgüleri birinci örgünün alt sırasındaki n noktanın, ikinci örgünün üst sırasındaki n noktaya yapıştırılmasıyla çarpılır.



3-telli örgü doğurayları



Şekil 1.30

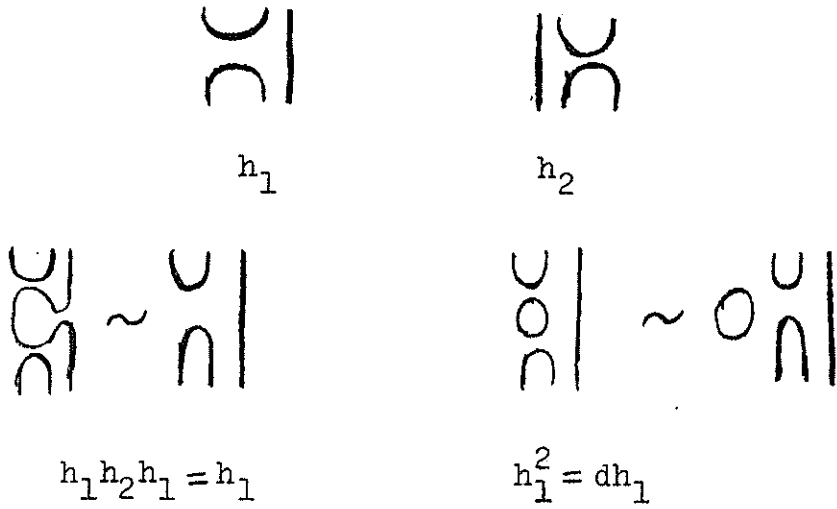
Şimdi bir örgünün evreninin durumları gözönüne alınsın. Şekil 1.31den kolayca anlaşılacaktır ki bunlar,

$$h_i^2 = dh_i$$

$$h_i h_{i\pm 1} h_i = h_i$$

$$h_i h_j = h_j h_i \quad |i-j| > 2 \quad \text{için}$$

bağıntıları ile h_1, \dots, h_{n-1} elementer diyagramlarının diyagramatik çarpımları gibi inşa edilebileceklerdir.



Şekil 1.31

Burada h_i yi kendi içine tıkamak suretiyle elde edilmiş kapalı ilmeği temsil etmek için d alınır. Diyagramlarda olduğu gibi, durumlar, tamamen örgülerin çarpılması gibi çarpılır. Böyle çarpımların sonucu fazladan kapalı ilmekler olduğundan meydana gelen yapıyı zaptetmek için bir karışık kombinatorial ve topolojik denklik bağıntısı koymaya ihtiyaç vardır. Bundan dolayı parantezleri hesaplamada bir kapalı birleşenin nerde olduğunun hiçbir etkisi yoktur (onları sadece sayarız).

2. ÖRTÜ UZAYLARI

2.1. Dallanmış örtü uzayı

Dallanmış örtü uzayının tanımı, R. H. Fox'ın kitabında vardır (8). Bu konuda bir otorite olan Fox'ın tanımı bu kısımda verilmiştir. Fox'a göre dallanmış örtü uzaylarına örtü uzaylarının tamlaması olarak bakılabilir (9).

2.2. Örtü uzayı

X, Y eğrisel bağlantılı uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ üzerine sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $y \in Y$ noktası için $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ ise ve $f^{-1}(y)$ nun her birleşeni f altında u ya topolojik eşyapılı olarak dönüşecek şekilde, Y nin eğrisel bağlantılı ve açık bir u komşuluğu varsa, (X, f) ikilisine Y nin örtü uzayı denir (15).

Teorem 1 : Eğer $g : Y \rightarrow Z$ bir örtü uzayı ve Z bir regüler topolojik uzay ise, Y de bir regüler topolojik uzaydır (8).

2.3. Tamlık

$g : Y \rightarrow Z$ bir örtü uzayı olsun. Eğer her $z \in Z$ noktasının bir bir açık w komşuluğuna karşılık $g^{-1}(w)$ nin seçilen bir v birleşeni için, $w_1 \subset w_2$ oldukça $v_1 \subset v_2$ oluyorsa g ye tamdır denir (8).

2.4. Yaprak sayısı

$f : X \rightarrow Z$ bir örtü uzayı olsun. Eğer $z, z' \in Z$ ise, $f^{-1}(z)$ ve $f^{-1}(z')$ içindeki noktaların sayısı eşittir. Bu sabit sayıya f örtü uzayının yaprak sayısı denir (8).

Eğer $g : Y \rightarrow Z$ herhangi bir örtü uzayı ise, z_0 adi noktaların kümesi, Z nin bir alt kümesidir (18).

Buradan, $X = g^{-1}(z_0)$ Y nin bir alt kümesidir. Dolayısıyla X , yerel bağlantılıdır. Bu sebepten $f = g_x$ bir örtü uzayıdır. Bu örtü uzayına g ile ilgili örtü uzayı denir.

2.5. Dallanmış örtü uzayı

Aşağıdaki şartlar sağlanırsa, $g : Y \rightarrow Z$ örtü uzayına bir dallanmış örtü uzayı denir (8).

- i. z_0 , Z içinde yoğun, bağlantılı ve yerel bağlantılıdır.
- ii. $X = g^{-1}(z_0)$ bağlantılıdır.

iii. $g, f : X \rightarrow z_0$ örtü uzayının bir tamlamasıdır.

2.6. Singüler küme

$g : Y \rightarrow Z$ bir dallanmış örtü uzayı olsun. $Z_S = Z - z_0$ kümesine f nin singüler kümesi denir (8).

Singüler kümesi boş olan bir dallanmış örtü uzayı, örtü uzayıdır. Riemann yüzeyleri dallanmış örtü uzaylarıdır.

2.7. Dallanma indisi

Eğer $y \in Y$, $g : Y \rightarrow Z$ dallanmış örtü uzayının herhangi bir noktası, $w, w_0 = w \cap z_0$ bağlantılı olacak şekilde $z = g(y)$ nin herhangi bağlantılı ve açık komşuluğu, v , $g^{-1}(w)$ nin y yi ihtiva eden birleşeni, $u = v \cap X$, $q = g/v$ ve $p = q/v$ ise, bu takdirde $q : v \rightarrow w$ bir dallanmış örtü uzayıdır ve p , $p : u \rightarrow w_0 = w \cap z_0$, q ile ilgili örtü uzayıdır. p nin indeksini $J(y, w)$ ile gösterelim. $w \subset w'$ olduğunda $J(y, w) \leq J(y, w')$ olacağı açıktır. $J(y, w)$ ların minimumunu $J(y)$ ile gösterelim. $J(y)$ ye y noktasının dallanma indisi denir (8).

2.8. Dallanma mertebesi

$J(y) - 1$ sayısına y nin dallanma mertebesi denir.

Eğer $J(y) > 1$ ise $Z = g(y)$ noktası açıkça bir singüler noktadır. Fakat bunun karşıtınının doğru olması gerekmez.

2.9. Sonlu dallanma

Eğer her $y \in Y$ için $J(y)$ dallanma indisi sonlu ise, $g : Y \rightarrow Z$ dallanmış örtü uzayına sonlu dallanmalıdır denir.

2.10. Regüler örtü uzayı

$g : Y \rightarrow Z$ bir dallanmış örtü uzayı ve $X = g^{-1}(z_0)$ olsun. Eğer $f = g/X$ regüler ise, g de regülerdir denir.

2.11. Fox' in algoritması

Ralph H. Fox tarafından bulunan bir algoritma ile A alt grubunun doğuraylarını ve bağıntılarını basit bir şekilde bulmak mümkündür. Bu algoritma Reidemeister-Schreier teoremine denktir.

Reidemeister-Schreier teoreminde, A nın G içindeki yan kümelerinin temsilcilerinin seçimi, eğer p taban noktası üzerinde bulunan lif A nın sağ yan kümelerinin A_1, A_2, \dots, A_v indisleri ile p_1, p_2, \dots, p_v olarak isimlendirilirse her

$k=1,2,\dots,v$ için E-L örtü uzayı, içinde p_1 den p_k ya giden bir eğrinin seçimine denktir. Schreier koşulu bu eğrilerin birleşiminin bir ağaç olmasını gerektirir. Eğer temsilci eğrilerin ağacı E-L nin dışına alınır, daha doğrusu bir v-doğru parçaları demeti, B, doğru parçalarının ortak olmayan uç noktaları p_1, p_2, \dots, p_v ile özdeşlenerek yeni bir uzay inşa edilirse, bu uzayın Poincare grubu Seifert-Van Kampen teoremine göre $A * F_{v-1}$ olarak bulunur (4). Burada F_{v-1} , rangı (v-1) olan serbest grup ve $*$ da serbest çarpım işaretidir (8).

$$h : G = | x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_{n-1} | \longrightarrow S_v$$

G den S_v içine geçişli bir gösterim olsun. Bu takdirde,

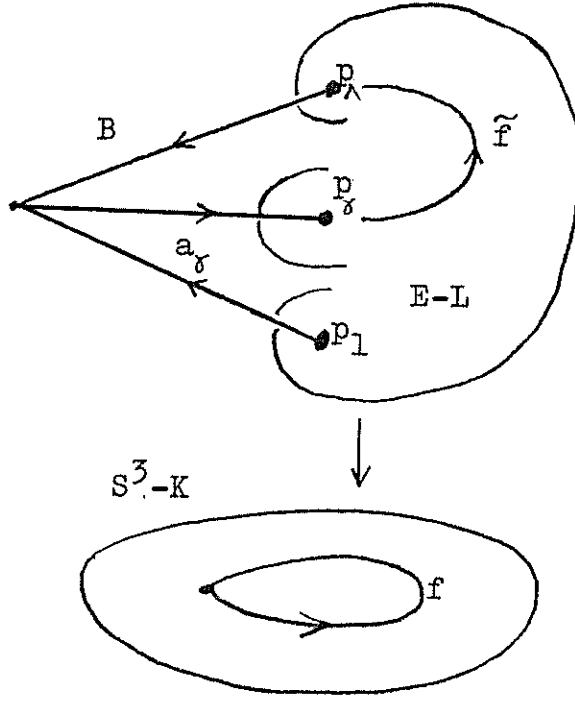
$$A * F_{v-1} = \left| \begin{array}{l} x_{11}, \dots, x_{n1} : r_{11}, \dots, r_{n-1,1} \\ \vdots \\ x_{1v}, \dots, x_{nv} : r_{1v}, \dots, r_{n-1,v} \end{array} \right|$$

formunda, yani, x_{ij} ve x_{kj} ler ($i=1, \dots, n; k=1, \dots, n-1; j=1, \dots, v$) doğuraylar ve bağıntılar olmak üzere bir gruptur. Burada x_{ij} ve x_{kj} simgeleriyle şu ifade edilmiştir. $g \in G$ ve $f \in S^3_{ij} - K$ uzayı içinde g yi temsil eden p tabanlı bir kapalı eğri olsun. O zaman g_r ile, $A * F_{v-1}$ grubunun (E-L) $\cap B$ uzayı içinde $a_\gamma \tilde{f} \bar{a}_\lambda$ formunda kapalı bir eğri ile temsil edilen elamanı gösterilmektedir (şekil 2,1).

Burada a_γ , B demeti içinde p_1 'i p_γ ya birleştiren iki doğru parçasını ve \bar{a}_λ , yine B içinde p_λ yi p_1 'e birleştiren iki doğru parçasını gösterir. \tilde{f} ise E-L uzayı içinde p_γ dan başlayıp f yi bir kere örtüp p_λ da biten bir eğriyi gösterir. γ ile λ birbirlerine,

$$h(y) = \left(\begin{array}{c} \dots \gamma \dots \\ \dots \lambda \dots \end{array} \right)$$

ile bağımlıdır.



Şekil 2.1 $\mathcal{E}_r = [a_\gamma \tilde{f} \bar{a}_\lambda]$

F ile $x_{j\gamma}$ ($j = 1, \dots, n$; $\gamma = 1, \dots, v$) simgelerinin serbestçe doğurulduğu serbest grubu gösterelim.

$x_{j\gamma} \rightarrow (x_j)_\gamma$ fonksiyonu, $\mathcal{Q}: F \rightarrow A_{F_{v-1}}$, $\mathcal{Q}(x_{j\gamma}) = (x_j)_\gamma$ özyapı dönüşümünün tanımlanmasını sağlar. Bu özyapı dönüşümü altında, G grubunun herhangi bir bağıntısına karşılık gelen F grubunun bir r elamanı

$$r = x_{j_1}^{\varepsilon_1} \cdot x_{j_2}^{\varepsilon_2} \dots \quad (\varepsilon_k = \pm 1)$$

$a; 1, 2, \dots, v$ sayılarından herhangi biri olmak üzere

$$r_a = x_{ja_1}^{\varepsilon_1} \cdot x_{ja_2}^{\varepsilon_2} \dots$$

bağıntılarını verir. Burada a_1, a_2, a_3, \dots şu koşula göre tayin edilirler.

$$x_{j_1}^{\xi_1} \dots x_{j_{k-1}}^{\xi_{k-1}} \left(\begin{array}{c} \dots a \dots \\ \dots a_k \dots \end{array} \right) \quad \xi_k = 1$$

$$x_{j_1}^{\xi_1} \dots x_{j_k}^{\xi_k} \left(\begin{array}{c} \dots a \dots \\ \dots a_k \dots \end{array} \right) \quad \xi_k = -1$$

Eğer $w_1=1, w_2, w_3, \dots, w_v$ Schreier koşulunu sağlayan A grubunun sağ yan kümeleri temsilcileri ise, $w_{21}, \dots, w_{v1}, F_{v-1}$ serbest grubunun doğurayları olarak seçilebilir. $A * F_{v-1}$ grubuna $w_{21}=1, w_{31}=1, \dots, w_{v1}=1$ bağıntılarının eklenmesiyle A grubu elde edilir. $\Pi(E, p)$ grubunu bulmak için dallanma bağıntılarını A ya eklemek gerekir. Bu bağıntıları veren elamanları içeren $A = \Pi(E-L, p)$ grubunun en yüksek normal alt grubu i_* in çekirdeğidir.

Eğer g, G nin K ya yakın çok küçük kapalı bir eğri ile temsil edilen bir elamanı ise ve

$$h(g) = (\beta_1 \dots \beta_k) (\gamma_1 \dots \gamma_\ell) \dots (\lambda_1 \dots \lambda_s)$$

c tane farklı devirin çarpımı ise,

$$\varepsilon_{\beta_1} \varepsilon_{\beta_2} \dots \varepsilon_{\beta_k} = 1, \varepsilon_{\gamma_1} \varepsilon_{\gamma_2} \dots \varepsilon_{\gamma_\ell} = 1, \dots \varepsilon_{\lambda_1} \varepsilon_{\lambda_2} \dots \varepsilon_{\lambda_s} = 1$$

denklemleri dallanma bağıntılarını verir.

G grubu Wirtinger yöntemi ile hesaplanmış bir düğüm grubu ise, x_1 doğurayı düğümün bir regüler komşuluğu olan katı bir torun bir meridyeni ile temsil edilir. Diğer doğuraylar x_1 ile eşleniktir. Bu sebepten eğer $h(x_1)$ c tane farklı devirin çarpımı ise, $h(x_i)$ den elde edilen dallanma bağıntıları ile A ya ait bağıntıların neticesidir. Bundan dolayı sadece $h(x_k)$, $k \in (1, 2, \dots, n)$ dan elde edilen dallanma bağıntılarının A ya eklenmesi yeterlidir. $h(x_k)$ dan elde edilen dallanma bağıntılarının A ya eklenmesi geometrik olarak K düğümünün üzerinde bulunan L alt kompleksinin $E-L$ uzayına eklenmesine karşılık gelir. L eğrisi bir düğüm veya bir halkadır.

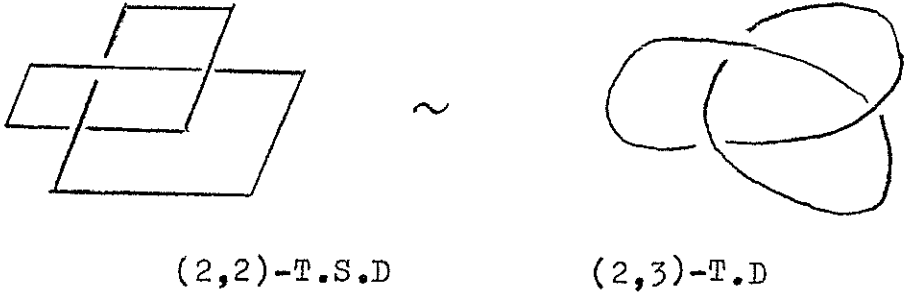
Herbir dallanma bağıntısının A ya eklenmesi cebirsel olarak Seifert-Van Kampen teoreminin uygulamasına karşılık gelir. Fox'ın bu algoritmasına dayanarak yonca yaprağı düğümü de denen $(2,3)$ -Türk düğümünün 4-yapraklı örtü uzaylarının sınıflandırmasını, $(3,3)$ -Türk saadet düğümünün 3-yapraklı örtü uzaylarının sınıflandırmasını $n=5,6,\dots,11$ için devirli örtü uzaylarının birinci homotopi ve homoloji grupları hesaplandı.

3. SONUÇLAR

3.1. S^3 küresinin (2,2)-Türk Saadet Düğümü üzerinde dallanmış örtü uzayları.

Bu kısımda yonca yaprağı veya (2,3)-Türk düğümü de denilen (2,2)-Türk Saadet Düğümü grubunun dördüncü dereceden simetrik grup içindeki homomorfizmlerin bir sınıflandırılması yapılmıştır. Bozhüyük profesörlük tezinde (3) HOMO isimli programla bu homomorfizmlerden 81 tanesini bulmuştur. Burada bu homomorfizmlerle ilgili 4-yapraklı örtü uzayları incelenmiş, sözü edilen homomorfizmler ve Fox'ın algoritması kullanılarak (2,3)-Türk düğümü üzerinde 4-yapraklı örtü uzaylarının birinci homotopi ve homoloji grupları elde edilmiştir.

(2,3)-Türk düğümünün düzlemsel normal bir izdüşümü aşağıda şekil 3.1de verilmiştir (5).



Şekil 3.1

Bu düğümün G ile Göstereceğimiz grubu

$$G = \Pi(S^3 - K) = |x, y : xyx\bar{y}\bar{x}\bar{y} = 1|$$

olduğu çeşitli yollardan (7,8,9) hesaplanmıştır.

Bu grubun S_4 içinde aşağıdaki şekilde verilen 97 adet homomorfizmi vardır. Bu 97 homomorfizm sekiz farklı sınıfa ayrılmaktadır. Bunlar,

1. Aşıkâr homomorfizm

$$h(x) h(y) (1)(2)(3)(4)$$

2. Dört yapraklı devirli homomorfizmler

$$h(x)=h(y)=(1234) \text{ (3,s.41 de 20).}$$

$$h(x)=h(y)=(1243) \text{ (3,s.42 de 26).}$$

$$h(x)=h(y)=(1342) \text{ (3,s.43 de 40).}$$

$$h(x)=h(y)=(1324) \text{ (3,s.44 de 56).}$$

$$h(x)=h(y)=(1432) \text{ (3,s.45 de 61).}$$

$$h(x)=h(y)=(1423) \text{ (3,s.46 da 80).}$$

3. Hemen hemen devirli homomorfizmler

$$h(x)=(1234) , h(y)=(1243) \text{ (3,s.41 de 21).}$$

$$h(x)=(1243) , h(y)=(1234) \text{ (3,s.42 de 25).}$$

$$h(x)=(1243) , h(y)=(1432) \text{ (3,s.42 de 28).}$$

$$h(x)=(1432) , h(y)=(1243) \text{ (3,s.44 de 58).}$$

$$h(x)=(1234) , h(y)=(1342) \text{ (3,s.41 de 22).}$$

$$h(x)=(1342) , h(y)=(1234) \text{ (3,s.43 de 39).}$$

$$h(x)=(1234) , h(y)=(1423) \text{ (3,s.41 de 24).}$$

$$h(x)=(1423) , h(y)=(1234) \text{ (3,s.46 da 76).}$$

$$h(x)=(1234) , h(y)=(1324) \text{ (3,s.41 de 23).}$$

$$h(x)=(1324) , h(y)=(1234) \text{ (3,s.44 de 53).}$$

$$h(x)=(1243) , h(y)=(1324) \text{ (3,s.42 de 27).}$$

$$h(x)=(1324) , h(y)=(1243) \text{ (3,s.44 de 54).}$$

$$h(x)=(1243) , h(y)=(1423) \text{ (3,s.42 de 29).}$$

$$h(x)=(1423) , h(y)=(1243) \text{ (3,s.46 da 77).}$$

$$h(x)=(1342) , h(y)=(1324) \text{ (3,s.42 de 35).}$$

$$h(x)=(1324) , h(y)=(1342) \text{ (3,s.44 de 55).}$$

$$h(x)=(1342) , h(y)=(1432) \text{ (3,s.43 de 41).}$$

$$h(x)=(1432) , h(y)=(1342) \text{ (3,s.44 de 59).}$$

$$h(x)=(1342) , h(y)=(1423) \text{ (3,s.43 de 42).}$$

$$h(x)=(1423) , h(y)=(1342) \text{ (3,s.46 da 78).}$$

$$h(x)=(1324) , h(y)=(1432) \text{ (3,s.44 de 57).}$$

$$h(x)=(1432) , h(y)=(1324) \text{ (3,s.44 de 60).}$$

$$h(x)=(1432) , h(y)=(1423) \text{ (3,s.45 de 62).}$$

$$h(x)=(1423) , h(y)=(1432) \text{ (3,s.46 da 79).}$$

4. Takıntılı homomorfizmler

- $h(x)=(1)(234)$, $h(y)=(3)(124)$ (3,s.40 da 3).
 $h(x)=(3)(124)$, $h(y)=(1)(234)$ (3,s.42 de 30).
 $h(x)=(1)(234)$, $h(y)=(4)(132)$ (3,s.40 da 4).
 $h(x)=(4)(132)$, $h(y)=(1)(234)$ (3,s.42 de 34).
 $h(x)=(1)(234)$, $h(y)=(2)(134)$ (3,s.40 da 5).
 $h(x)=(1)(243)$, $h(y)=(2)(134)$ (3,s.40 da 8).
 $h(x)=(2)(134)$, $h(y)=(1)(243)$ (3,s.43 de 48).
 $h(x)=(1)(243)$, $h(y)=(3)(142)$ (3,s.40 da 9).
 $h(x)=(3)(142)$, $h(y)=(1)(243)$ (3,s.45 de 63).
 $h(x)=(4)(123)$, $h(y)=(2)(134)$ (3,s.41 de 18).
 $h(x)=(2)(134)$, $h(y)=(4)(123)$ (3,s.44 de 49).
 $h(x)=(4)(123)$, $h(y)=(3)(142)$ (3,s.41 de 19).
 $h(x)=(3)(142)$, $h(y)=(4)(123)$ (3,s.45 de 64).
 $h(x)=(3)(124)$, $h(y)=(4)(132)$ (3,s.42 de 32).
 $h(x)=(4)(132)$, $h(y)=(3)(124)$ (3,s.42 de 36).
 $h(x)=(3)(124)$, $h(y)=(2)(143)$ (3,s.42 de 33).
 $h(x)=(2)(143)$, $h(y)=(3)(124)$ (3,s.45 de 68).
 $h(x)=(4)(132)$, $h(y)=(2)(143)$ (3,s.43 de 38).
 $h(x)=(2)(143)$, $h(y)=(4)(132)$ (3,s.45 de 69).
 $h(x)=(2)(134)$, $h(y)=(3)(142)$ (3,s.44 de 51).
 $h(x)=(3)(142)$, $h(y)=(2)(134)$ (3,s.45 de 65).
 $h(x)=(2)(143)$, $h(y)=(1)(234)$ (3,s.45 de 67).
 $h(x)=(1)(234)$, $h(y)=(2)(143)$
 $h(x)=(1)(243)$, $h(y)=(4)(123)$ (3,s.41 de 7).
 $h(x)=(4)(123)$, $h(y)=(1)(243)$ (3,s.42 de 16).

5. Çift iki yapraklı (bağlantısız) homomorfizmler

- $h(x)=h(y)=(12)(34)$ (3,s.41 de 15).
 $h(x)=h(y)=(13)(24)$ (3,s.44 de 52).
 $h(x)=h(y)=(14)(23)$ (3,s.46 da 81).

6. Üç devirli bağlantısız homomorfizmler

$$h(x)=h(y)=(1)(234) \text{ (3,s.40 da 2).}$$

$$h(x)=h(y)=(1)(243) \text{ (3,s.40 da 6).}$$

$$h(x)=h(y)=(4)(123) \text{ (3,s.41 de 17).}$$

$$h(x)=h(y)=(4)(132) \text{ (3,s.43 de 37).}$$

$$h(x)=h(y)=(3)(124) \text{ (3,s.42 de 31).}$$

$$h(x)=h(y)=(3)(142) \text{ (3,s.45 de 66).}$$

$$h(x)=h(y)=(2)(134) \text{ (3,s.44 de 50).}$$

$$h(x)=h(y)=(2)(143) \text{ (3,s.45 de 70).}$$

7. İki yapraklı devirli homomorfizmler

$$h(x)=h(y)=(1)(3)(24) \text{ (3,s.40 da 12).}$$

$$h(x)=h(y)=(2)(3)(14) \text{ (3,s.45 de 75).}$$

$$h(x)=h(y)=(2)(4)(13) \text{ (3,s.43 de 46).}$$

$$h(x)=h(y)=(1)(2)(34)$$

$$h(x)=h(y)=(1)(4)(23)$$

$$h(x)=h(y)=(3)(4)(12)$$

8. İki sarmalı (bağlantısız) homomorfizmler

$$h(x)=(3)(4)(12) \text{ , } h(y)=(2)(4)(13) \text{ (3,s.41 de 13).}$$

$$h(x)=(2)(4)(13) \text{ , } h(y)=(3)(4)(12) \text{ (3,s.43 de 45).}$$

$$h(x)=(1)(3)(24) \text{ , } h(y)=(1)(4)(23) \text{ (3,s.40 da 11).}$$

$$h(x)=(1)(4)(23) \text{ , } h(y)=(1)(3)(24)$$

$$h(x)=(3)(4)(12) \text{ , } h(y)=(2)(3)(14) \text{ (3,s.41 de 14).}$$

$$h(x)=(2)(3)(14) \text{ , } h(y)=(3)(4)(12) \text{ (3,s.46 da 73).}$$

$$h(x)=(2)(4)(13) \text{ , } h(y)=(1)(2)(34) \text{ (3,s.43 de 43).}$$

$$h(x)=(1)(2)(34) \text{ , } h(y)=(2)(4)(13)$$

$$h(x)=(2)(4)(13) \text{ , } h(y)=(1)(4)(23) \text{ (3,s.43 de 44).}$$

$$h(x)=(1)(4)(23) \text{ , } h(y)=(2)(4)(13)$$

$$h(x)=(2)(4)(13) \text{ , } h(y)=(2)(3)(14) \text{ (3,s.43 de 47).}$$

$$h(x)=(2)(3)(14) \text{ , } h(y)=(2)(4)(13) \text{ (3,s.46 da 74).}$$

$$h(x)=(2)(3)(14) \text{ , } h(y)=(1)(2)(34) \text{ (3,s.45 de 71).}$$

$$h(x)=(1)(2)(34) \text{ , } h(y)=(2)(3)(14)$$

$$h(x)=(2)(3)(14) \text{ , } h(y)=(1)(3)(24) \text{ (3,s.45 de 72).}$$

$$h(x)=(1)(3)(24) \text{ , } h(y)=(2)(3)(14)$$

$$\begin{aligned}
h(x) &= (1)(2)(34) , h(y) = (1)(3)(24) \\
h(x) &= (1)(3)(24) , h(y) = (1)(2)(34) \\
h(x) &= (1)(2)(34) , h(y) = (1)(4)(23) \\
h(x) &= (1)(4)(23) , h(y) = (1)(2)(34) \\
h(x) &= (1)(3)(24) , h(y) = (3)(4)(12) \\
h(x) &= (3)(4)(12) , h(y) = (1)(3)(24) \\
h(x) &= (1)(4)(23) , h(y) = (3)(4)(12) \\
h(x) &= (3)(4)(12) , h(y) = (1)(4)(23)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu sınıflandırmada 6. ,7. ve 8. sınıflardaki homomorfizmler S_2 ve S_3 içindeki homomorfizmlere denk olduğundan bunlar üzerinde durulmayacaktır. Bunlar (4) nolu kaynakta incelendi.

Herbir sınıftaki homomorfizmler birbirlerine denk olduğundan, denk homomorfizmler arasından bir temsilci alınıp onunla ilgili örtü uzayı incelendi ve birinci homotopi ve homoloji grupları bulundu.

3.2 Örnekler

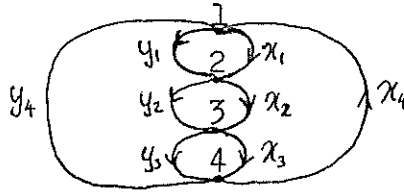
Örnek 1. İlkönce 2. sınıfı temsilen $h(x)=h(y)=(1234)$ homomorfizmini alalım. Bu homomorfizme karşılık gelen örtü uzayı Σ , K üzerinde dallanma eğrisi L ile gösterildi. Bu durumda $\Sigma-L$, S^3-K nın 4-yapraklı devirli örtü uzayıdır. Fox' ın algoritmasına göre bu homomorfizmden $(\Sigma-L)*F_3$ grubu aşağıdaki gibi hesaplanır (3,s. 41 de 20).

x	y	x	\bar{y}	\bar{x}	\bar{y}
1	2	3	4	3	2
2	3	4	1	4	3
3	4	1	2	1	4
4	1	2	3	2	1

Yukardaki tablodan,

$$\Pi(\Sigma-L)*F_3 = \begin{vmatrix} x_1, x_2 & x_1 y_2 x_3 \bar{y}_3 \bar{x}_2 \bar{y}_1 \\ x_3, x_4 & x_2 y_3 x_4 \bar{y}_4 \bar{x}_3 \bar{y}_2 \\ y_1, y_2 & x_3 y_4 x_1 \bar{y}_1 \bar{x}_4 \bar{y}_3 \\ y_3, y_4 & x_4 y_1 x_2 \bar{y}_2 \bar{x}_1 \bar{y}_4 \end{vmatrix}$$

bulunur. x ve y doğuraylarının temsil ettiği kapalı eğrileri, $\Sigma-L$ örtü uzayında örten eğriler aşağıda verilmiştir. Bu şekilden hemen, F_3 ün doğurayları olarak x_1, x_2, x_3 ve x_4 den üçü veya y_1, y_2, y_3 ve y_4 den üçünün seçilebileceği Fox'ın algoritmasından çıkar (şekil 3.2).



Şekil 3.2

y_2, y_3, y_4 , F_3 ün doğurayları olarak seçilip yukardaki gruba $y_2=y_3=y_4=1$ bağıntıları eklenirse,

$$\Pi(\Sigma-L) = \begin{vmatrix} x_1, x_2 & x_1 x_3 \bar{x}_2 \bar{y}_1 \\ x_3, x_4 & x_2 x_4 \bar{x}_3 \\ y_1 & x_3 x_1 \bar{y}_1 \bar{x}_4 \\ & x_4 y_1 x_2 \bar{x}_1 \end{vmatrix}$$

grubu elde edilir. İncelenmekte olan 4-yapraklı devirli örtü uzayının dallanma bağıntıları $y_1 y_2 y_3 y_4 = 1$ veya $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$ olup, $y_1 = 1$ bağıntısına kısalmaktadır. Bu bağıntının yukardaki gruba eklenmesiyle $\Pi(\Sigma)$ elde edilir. Yani,

$$\Pi(\Sigma) = |x_1, x_2, x_3, x_4 : x_1 x_3 \bar{x}_2, x_2 x_4 \bar{x}_3, x_3 x_1 \bar{x}_4, x_4 x_2 \bar{x}_1|$$

olur. Burada birinci bağıntıdan $x_2 = x_1 x_3$ ikinci ve dördüncü bağıntıda yerine yazılırsa,

$$\Pi(\Sigma) = |x_1, x_3, x_4 : x_1 x_3 x_4 \bar{x}_3, x_3 x_1 \bar{x}_4, x_4 x_1 x_3 \bar{x}_1|$$

bulunur. İkinci bağıntıdan $x_4 = x_3 x_1$ birinci ve üçüncü bağıntıda yerine yazılırsa,

$$\Pi(\Sigma) = |x_1, x_3 : x_1 x_3 x_3 x_1 \bar{x}_3, x_3 x_1 x_1 x_3 \bar{x}_1|$$

olur. Buradan,

$$H(\Sigma) = |x_1, x_3 : x_1^2 x_3 = 1, x_3^2 x_1 = 1|$$

olur. Son olarak birinci bağıntıdan $x_3 = \bar{x}_1^2$, ikinci bağıntıda yerine yazılırsa,

$$H(\Sigma) = |x_1 : \bar{x}_1^4 x_1 = 1| = |x_1 : x_1^3 = 1| = Z_3$$

bulunur.

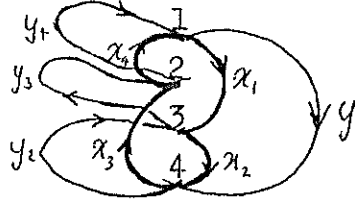
Örnek 2. Şimdide 3. sınıfı temsilen devirli olmayan $h(x) = (1342)$ ve $h(y) = (1432)$ homomorfizmini alınıp birinci örnekte yapılan işlemler aynen tekrarlanırsa, Fox'ın algoritmasına göre bu homomorfizmden $(\Sigma - L) * F_3$ grubu aşağıdaki gibi hesaplanır (3, s.43 de 41).

x	y	x	\bar{y}	\bar{x}	\bar{y}
1	3	2	1	2	4
2	1	4	2	3	1
3	4	3	4	1	2
4	2	1	3	4	3

yukardaki tablodan

$$\prod(\Sigma-L)*F_3 = \left| \begin{array}{cc} x_1, x_2 & x_1 y_3 x_2 \bar{y}_2 \bar{x}_4 \bar{y}_1 \\ x_3, x_4 & x_2 y_1 x_4 \bar{y}_3 \bar{x}_1 \bar{y}_2 \\ y_1, y_2 & x_3 y_4 x_3 \bar{y}_1 \bar{x}_2 \bar{y}_3 \\ y_3, y_4 & x_4 y_2 x_1 \bar{y}_4 \bar{x}_3 \bar{y}_4 \end{array} \right|$$

yazılır. Burada da x ve y doğuraylarının temsil ettiği eğrileri, $\Sigma-L$ uzayında örten eğriler aşağıdaki şekilde verilmiştir. Bu şekilden F_3 ün doğurayları olarak x_1, x_2, x_3 ve x_4 den üçünün seçilebileceği Fox'ın algoritmasından çıkar.



Şekil 3.3

y_2, y_3 ve y_4 F_3 ün doğurayları olarak seçilir $\prod(\Sigma-L)*F_3$ grubuna $y_2=y_3=y_4=1$ bağıntıları eklenirse,

$$\prod(\Sigma-L) = \left| \begin{array}{cc} x_1, x_2 & x_1 x_2 \bar{x}_4 \bar{y}_1 \\ x_3, x_4 & x_2 y_1 x_4 \bar{x}_1 \\ y_1 & x_3 x_3 \bar{y}_1 \bar{x}_2 \\ & x_4 x_1 \bar{x}_3 \end{array} \right|$$

grubu bulunur. Bu örtü uzayının dallanma bağıntıları $y_1 y_2 y_3 y_4 = 1$ (veya $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$) olup buradan $y_1 = 1$ bulunur. Bu $\prod(\Sigma-L)$ grubuna eklenirse,

$$\prod(\Sigma) = |x_1, x_2, x_3, x_4 : x_1 x_2 \bar{x}_4, x_2 x_4 \bar{x}_1, x_3^2 \bar{x}_2, x_4 x_1 \bar{x}_3|$$

olur. Birinci bağıntıdan $x_4 = x_1 x_2$ ikinci ve dördüncü bağıntı-

tılarda yerine yazılırsa,

$$\Pi(\Sigma) = |x_1, x_2, x_3 : x_2 x_1 x_2 x_1, x_3^2 \bar{x}_2, x_1 x_2 x_1 \bar{x}_3|$$

bulunur. İkinci bağıntıdan $x_2 = x_3^2$ birinci ve üçüncü bağıntıda yerine yazılırsa,

$$\Pi(\Sigma) = |x_1, x_3 : x_3^2 x_1 x_3^2 \bar{x}_1, x_1 x_3^2 x_1 \bar{x}_3|$$

olur. Buradan,

$$H(\Sigma) = |x_1, x_3 : x_3^4 = 1, x_1^2 x_3 = 1| = |x_1 : x_1^8 = 1| = Z_8$$

bulunur.

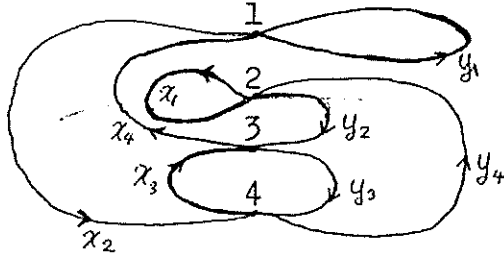
Örnek 3. Dördüncü sınıfı temsilen $h(x)=(2)(143)$ ve $h(y)=(1)(234)$ homomorfizmlerini alıp buna karşılık gelen 4-yapraklı örtü uzayının grubu, Fox'ın algoritmasına göre

x	y	x	\bar{y}	\bar{x}	\bar{y}
1	4	2	4	1	1
2	2	3	1	3	2
3	1	1	3	4	3
4	3	4	2	2	4

tablosundan (3, s. 45 de 67).

$$\Pi(\Sigma-L) * F_3 = \left| \begin{array}{ll} x_1, x_2 & x_1 y_4 x_2 \bar{y}_4 \bar{x}_1 \bar{y}_1 \\ x_3, x_4 & x_2 y_2 x_3 \bar{y}_1 \bar{x}_3 \bar{y}_2 \\ y_1, y_2 & x_3 y_1 x_1 \bar{y}_3 \bar{x}_4 \bar{y}_3 \\ y_3, y_4 & x_4 y_3 x_4 \bar{y}_2 \bar{x}_2 \bar{y}_4 \end{array} \right|$$

yazılır. x ve y nin temsil ettiği eğrileri $(\Sigma-L)$ uzayında örten eğriler şekil 3.4'da gösterilmiştir.



Şekil 3.4

önceki örnekler için yapılanlar aynen tekrar edilirse,

$$\Pi(\Sigma) = |x_1, x_2, x_3, x_4 : x_1 x_2 \bar{x}_1 = 1, x_2 = 1, x_3 x_1 \bar{x}_4 = 1, x_4^2 \bar{x}_2 = 1|$$

olur. İkinci bağıntıdan $x_2 = 1$ ve üçüncü bağıntıdan $x_4 = x_1 x_3$ alınıp dördüncü bağıntıda yerine yazılırsa,

$$\Pi(\Sigma) = |x_1, x_3 : (x_3 x_1)^2 = 1| \Rightarrow H(\Sigma) = |x_1, x_3 : x_3^2 x_1^2 = 1|$$

bulunur.

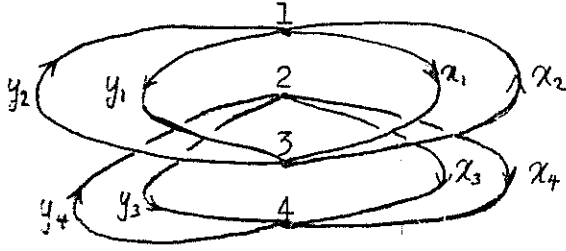
Aynı şekilde hareket ederek beşinci sınıfı temsil eden $h(x) = h(y) = (13)(24)$ homomorfizmine karşılık

$$\Pi(\Sigma) = |x_1, x_2 : x_1^4 \bar{x}_1 = 1, x_2^4 \bar{x}_2 = 1|$$

elde edilir. Buradan

$$H(\Sigma) = |x_1, x_2 : x_1^3 = 1, x_2^3 = 1| = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$$

bulunur. Bu sınıftaki homomorfizmlere karşılık gelen örtü uzayının geçişsiz olduğu Şekil 3.5 de görülmektedir.



Şekil 3.5

Altıncı, yedinci ve sekizinci sınıfları temsilen sırasıyla $h(x)=h(y)=(1)(234)$, $h(x)=h(y)=(1)(2)(34)$ ve $h(x)=(3)(4)(12)$ $h(y)=(2)(4)(13)$ homomorfizmleri alınırsa bunlara karşılık sırasıyla birinci homotopi ve homoloji grupları,

$$\Pi(\Sigma) = \{x_2, x_4 : x_2 x_4 x_2 \bar{x}_4 = 1, x_4 x_2 x_4 \bar{x}_2 = 1\}$$

$$\Xi(\Sigma) = \{x_2, x_4 : x_2^2 = 1, x_4^2 = 1\} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,$$

$$\Pi(\Sigma) = \{x_1, x_2, x_3, x_4 : x_1^2 \bar{x}_1 = 1, x_2^2 \bar{x}_2 = 1, x_3^2 \bar{x}_3 = 1, x_4^2 \bar{x}_4 = 1\}$$

$$H(\Sigma) = \{x_3 : x_3^3 = 1\} = \mathbb{Z}_3$$

ve

$$\Pi(\Sigma) = \{x_1, x_2, x_3, x_4 : x_1 x_2 x_3 = 1, x_2 x_3 \bar{x}_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1\}$$

$$H(\Sigma) = \{x_1, x_2 : x_1 x_2 = 1\}$$

olarak bulunur.

Bu sınıflar bulunurken $h(x)$ ve $h(y)$ nin mümkün olan bütün halleri gözönünde bulunduruldu. Bunlardan sadece homomorfizm olanların sınıflandırılması yapıldı. Aşağıdaki tablonun ilk ve son sütununa dikkat edilirse, $h(x)=(2)(134)$ ve $h(y)=(1)(234)$ gösteriminin bir homomorfizm olmadığı görülür.

x	y	x	\bar{y}	\bar{x}	\bar{y}
1	3	4	1	1	4
2	2	3	4	3	1
3	4	2	2	4	3
4	1	1	3	2	2

3.3. Yonca yaprağı eğiliminin n-yapraklı devirli örtü uzaylarının birinci homotopi ve $5 \leq n \leq 11$ için birinci homoloji grupları.

Bu kısımda Fox'ın algoritması kullanılarak 3.2. deki örnekler için yapılan işlemler tekrarlanmak suretiyle, yonca yaprağı eğiliminin n-yapraklı devirli birinci homotopi grubu

$$\Pi(\Sigma) = |x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \quad x_1 \bar{x}_2, x_2 \bar{x}_3, \dots, x_n \bar{x}_1|$$

olarak bulundu.

$h : G \rightarrow S_5$, $h(x) = h(\bar{y}) = (12345)$ homomorfizmini alalım. Yukarıda verilen (I) bağıntısından,

$$\Pi(\Sigma) = |x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 : x_1 x_3 \bar{x}_2, x_2 x_4 \bar{x}_3, x_3 x_5 \bar{x}_4, x_4 x_1 \bar{x}_5, x_5 x_2 \bar{x}_1|$$

bulunur. Birinci bağıntıdan $x_2 = x_1 x_3$ ikinci ve beşinci bağıntıda yerine yazılırsa,

$$\Pi(\Sigma) = |x_1, x_3, x_4, x_5 : x_1 x_3 x_4 \bar{x}_3, x_3 x_5 \bar{x}_4, x_4 x_1 \bar{x}_5, x_5 x_1 x_3 \bar{x}_1|$$

elde edilir. Dördüncü bağıntıdan $x_5 = x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_1$ alınıp ikinci ve üçüncü bağıntıda yerine yazılırsa,

$$\Pi(\Sigma) = |x_1, x_3, x_4 : x_1 x_3 x_4 \bar{x}_3, x_3 x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_1 \bar{x}_4, x_4 x_1 x_1 x_3 \bar{x}_1|$$

bulunur. Şimdide ikinci bağıntıdan $x_4 = x_3 x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_1$ alınıp birinci ve üçüncü bağıntıda yerine yazılırsa,

$$\Pi(\Sigma) = |x_1, x_3 : x_1 x_3^2 x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_1 \bar{x}_3, x_3 x_1 \bar{x}_3 x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_1|$$

bulunur. Buradan,

$$H(\Sigma) = |x_1, x_3 : x_1 = 0, x_1 x_3 = 0| = 0$$

olur. Bu sonuç (9, s.156) da verilen sonucu doğrular.

$h : G \rightarrow S_6$, $h(x) = h(y) = (123456)$ homomorfizmi için (I) bağıntısından,

$$\Pi(\Sigma) = |x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 : x_1 x_3 \bar{x}_2, x_2 x_4 \bar{x}_3, \dots, x_6 x_2 \bar{x}_1|$$

bulunur. Birinci bağıntıdan $x_2 = x_1 x_3$ alınıp ikinci ve altıncı bağıntıda yerine yazılırsa,

$$\Pi(\Sigma) = |x_1, x_3, x_4, x_5, x_6 : x_1 x_3 x_4 \bar{x}_3, \dots, x_4 x_6 \bar{x}_5, x_5 x_1 \bar{x}_6, x_6 x_1 x_3 \bar{x}_1|$$

olur. Beşinci bağıntıdan $x_6 = x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_1$ yi alıp üçüncü ve dördüncü bağıntıda yerine yazarsak ve elde edilen $\Pi(\Sigma)$ grubunun ikinci bağıntısından $x_4 = x_3 x_5$ alınıp birinci ve üçüncü bağıntıda yerine yazılır ve nihayet elde edilen bu $\Pi(\Sigma)$ grubundan üçüncü bağıntıdan $x_5 = x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_1^2$ çekilip birinci ve ikinci bağıntılarda yerlerine yazılırsa,

$$\Pi(\Sigma) = |x_1, x_3 : x_1 x_3^2 x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_1^2 \bar{x}_3, x_3 x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_1^2 x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_1 x_1^2 x_3 \bar{x}_1|$$

olur. Buradan,

$$H(\Sigma) = |x_1, x_3 : | = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

bulunur. Bu sonuç (9, s.156) da verilen sonucu doğrular.

Aynı şekilde devam edilerek $n=7, 8, 9, 10, 11$ için $\pi : \mathbb{P}^1 \rightarrow S_n$ homomorfizmlerine karşılık, n -yapraklı devirli örtü örtülerinin birinci homotopi ve homoloji grupları sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$n=7$ için,

$$\pi(\Sigma) = |x_1, x_3 : \bar{x}_3 \bar{x}_1 x_3 x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_1^2 \bar{x}_3 x_1 x_3^2, \bar{x}_3^2 \bar{x}_1 x_3 x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_1|$$

$$H(\Sigma) = |x_1, x_3 : x_1=0, x_3=0| = 0$$

$n=8$ için,

$$\pi(\Sigma) = |x_1, x_3 : \bar{x}_3 \bar{x}_1 x_3 x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_1 x_3^2, \bar{x}_3^2 \bar{x}_1 x_3 x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_1 x_3 \bar{x}_1|$$

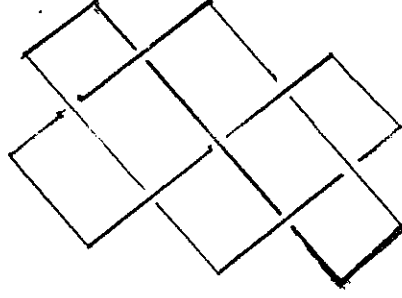
$$H(\Sigma) = |x_3 : x_3^3=1| = \mathbb{Z}_3$$

$n=9$ için,

$$\pi(\Sigma) = \left| x_1, x_3 : \begin{array}{l} \bar{x}_3 \bar{x}_1 x_3 x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_1 x_3 \bar{x}_1 \\ \bar{x}_3 x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_1 x_3 x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_1 x_3 \bar{x}_1 \end{array} \right|$$

$$H(\Sigma) = |x_1, x_3 : x_1^2=1, x_3^2=1| = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

$n=10$ için,



Şekil 3.6

Bu grubun S_3 içinde 6 tane homomorfizmi vardır. Bunlar üç farklı sınıfa ayrılmaktadır.

1. Üç yapraklı devirli homomorfizmler

$$h(x)=h(u)=(123)$$

$$h(x)=h(u)=(132)$$

2. İki yapraklı devirli homomorfizmler

$$h(x)=h(u)=(1)(23)$$

$$h(x)=h(u)=(2)(13)$$

$$h(x)=h(u)=(3)(12)$$

3. Aşık homomorfizm

$$h(x)=h(u)=(1)(2)(3)$$

Şimdi bu sınıfların herbirinden bir temsilci alıp onunla ilgili örtü uzayını inceleyelim.

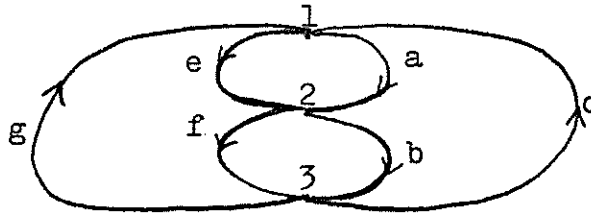
1. $h(x)=h(u)=(123)$ homomorfizmini alalım. Bu homomorfizme karşılık gelen dallanmış örtü uzayı Σ , K üzerindeki dallanma eğrisi L ile gösterildi. Bu durumda $\Sigma-L$, S^3-K nın üç yapraklı devirli örtü uzayıdır. Fox'ın algoritmasına göre bu homomorfizmden, $(\Sigma-L)*F_2$ grubu aşağıdaki gibi hesaplandı.

\bar{u}	x	\bar{u}	\bar{x}	u	\bar{x}	u	x	\bar{u}	x	\bar{u}	\bar{x}	u	\bar{x}	u	x	\bar{u}	x	\bar{u}	\bar{x}	u	\bar{x}					
1	3	1	3	2	3	2	3	1	3	1	3	2	3	2	3	1	3	1	2	1	2	1	3	1	2	1
2	1	2	1	3	1	3	1	2	1	2	1	3	1	3	1	2	1	2	3	2	3	2	1	2	3	2
3	2	3	2	1	2	1	2	3	2	3	2	1	2	1	2	3	2	3	1	3	1	3	2	3	1	3

Yukardaki tablodan faydalanarak ve $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=c$, $x_4=d$ ve $u_1=e$, $u_2=f$, $u_3=g$, $u_4=h$ yazarak

$$\prod(\Sigma-L)*F_2 = \left| \begin{array}{l} \bar{g}c\bar{g}\bar{b}f\bar{b}f\bar{c}g\bar{c}g\bar{b}f\bar{b}f\bar{c}g\bar{c}e\bar{a}e\bar{a}g\bar{c}e\bar{a} \\ c,e : \bar{e}a\bar{e}\bar{c}g\bar{c}g\bar{a}e\bar{a}e\bar{c}g\bar{c}g\bar{a}e\bar{a}f\bar{b}f\bar{b}e\bar{a}f\bar{b} \\ \bar{f}b\bar{f}a\bar{e}a\bar{e}b\bar{f}b\bar{f}a\bar{e}a\bar{e}b\bar{f}b\bar{g}c\bar{g}c\bar{f}b\bar{g}c \end{array} \right|$$

bulunur. x ve u doğuraylarının temsil ettiği kapalı eğrileri $\Sigma-L$ örtü uzayında örten eğriler aşağıda verilmiştir. Bu şekilden F_2 nin doğurayları olarak a,b,c den ikisi veya e,f,g den ikisinin seçilebileceği Fox algoritmasından çıkar.



Şekil 3.7

f ve g F_2 nin doğurayları olarak seçilip yukardaki gruba $f=g=1$ bağıntıları eklenirse,

$$\prod(\Sigma-L) = \left| \begin{array}{l} a,b : \bar{c}b^2c^2\bar{b}^2c^2e\bar{a}e\bar{a}c\bar{e}\bar{a} \\ c,e : \bar{e}a\bar{e}\bar{c}^2a^2\bar{e}c^2a\bar{e}a\bar{b}^2\bar{e}a\bar{b} \\ \bar{b}a\bar{e}a\bar{e}b^2\bar{a}e\bar{a}e\bar{b}^2c^2\bar{b}c \end{array} \right|$$

grubu elde edilir. İncelenmekte olan 3-yapraklı devirli örtü uzayının dallanma bağıntıları $abc=efg=1$ olup son eşitlik $e=1$ bağıntısına kısalmaktadır. Bu bağıntının yukardaki gruba eklenmesiyle $\prod(\Sigma)$ elde edilir. Yani,

$$\Pi(\Sigma) = \left| \begin{array}{l} a \quad c\bar{b}^2c^2\bar{b}^2c^2\bar{a}^2c\bar{a}=1 \\ b : a\bar{c}^2a^2\bar{c}^2a^2\bar{b}^2a\bar{b}=1 \\ c \quad b\bar{a}^2b^2\bar{a}^2b^2\bar{c}^2b\bar{c}=1 \end{array} \right|$$

olur. $abc=1$ olduğundan $\bar{c}=ab$ ve $c=\bar{b}\bar{a}$ olarak alınır ve $\Pi(\Sigma)$ grubunda yerine yazılırsa,

$$\Pi(\Sigma) = \left| \begin{array}{l} a \quad \bar{b}\bar{a}b^2(\bar{b}\bar{a})^2\bar{b}^2(\bar{b}\bar{a})^2\bar{a}^2\bar{b}\bar{a}^2=1 \\ b : a(ab)^2a^2(ab)^2a^2\bar{b}^2a\bar{b}=1 \\ b \quad b\bar{a}^2b^2\bar{a}^2b^2(ab)^2bab=1 \end{array} \right|$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} H(\Sigma) &= |a, b : \bar{b}^{10}\bar{a}^9=1, a^{10}b=1, b^9\bar{a}=1| \\ &= |a, b : \bar{b}^{10}(\bar{b}^9)^9=1, (b^9)^{10}b=1| \\ &= |b : \bar{b}^{91}1| = Z_{91} \end{aligned}$$

olur.

2. $h : G \rightarrow S_3$, $h(x)=h(u)=(1)(23)$ için birinci örnekteki aynı işlemler yapılırsa,

$$\Pi(\Sigma) = |a, b : a=1, \bar{b}^{13}=1, b^{13}=1|$$

olur. Buradan,

$$H(\Sigma) = |b : b^{13}=1| = Z_{13}$$

olarak bulunur.

M

Massey 53
Millet 25
Murasugi 25,53

N

Normal izdüşüm 5

Ö

Örgü 20
-diyaqramı 25
-doğurayları 26
-grubu 26
Örtü uzayı 28

P

Paralel burulma 16
Paralel izdüşüm 4
Parantez polinomu 16
Poligonal düğüm 1

R

Regüler izdüşüm 4
-pozisyon 4
Reidemeister 53
-dönüşümü 2
-hareketleri 2
-teoremi 29

Renk 16

Rolfsen 53

S

Schreier 29
Seifert 33
Singüler küme 29

Sonlu dallanma 29

Span(L) 24

T

Tait 25
Tamlık 28
Tersine denk düğüm 7
Thistlethwaite 24,53
Tor düğümü 6
Türk 34

Ü

Üst geçit 5
-noktası 5

V

Van-Kam Pen 33
Vaughan Jones 19

W

White 53
Whithead Halkası 13
William 53

Y

Yönlendirme 6
Yaprak sayısı 28