



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI



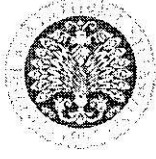
PERİYODİK FONKSİYONLAR ve UYGULAMALARI
(Periodic Functions and Their Applications)

Ferhat ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ
Prof. Dr. Ahmet IŞIK

ERZURUM — 2011



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ KABUL TUTANAĞI

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Prof. Dr. Ahmet IŞIK danışmanlığında, Ferhat ÖZTÜRK tarafından hazırlanan bu çalışma 19/01/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından İlköğretim Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ahmet IŞIK

İmza:

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Abdullah KAPLAN

İmza:

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. A. Cihan KONYALIOĞLU

İmza:

Yukarıdaki imzalar adı geçen öğretim üyelerine aittir. ... / ... / ...

Prof. Dr. H.Ahmet KIRKKILIÇ

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PERİYODİK FONKSİYONLAR ve UYGULAMALARI

Ferhat ÖZTÜRK

Atatürk Üniversitesi

Eğitim Bilimleri Enstitüsü

İlköğretim Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet IŞIK

Periyodik fonksiyonlar; matematik alanında, matematiğin uygulama alanlarında ve fizik, fizik mühendisliği, elektrik-elektronik mühendisliği, istatistik gibi diğer uygulamalı bilimlerde sıkça kullanılır duruma gelmiştir. Periyodik fonksiyonlar bilimsel olarak da üzerinde çok çalışılan ve araştırılan bir konudur. Teknolojinin oluşumuna büyük destek sağlayan, dolayısıyla insan hayatını yakından etkileyen periyodik fonksiyonların kuramsal temellerinin ve uygulama alanlarıyla birlikte bilime katkısının araştırıldığı bu çalışma; uygulamalı matematikte, özellikle fizik ve mühendislikte uygulama alanı geniş olan periyodik fonksiyonları başka bir açıdan incelemeyi amaçlar. Çalışmada ulusal ve uluslararası alan araştırması yapılmış ve tarama modeli kullanılmıştır. Sonuç olarak, Fourier analizinde periyodik fonksiyonların yoğun bir şekilde kullanılmasıyla oluşan ve günlük hayatı kolaylaştıran birçok uygulama alanının olduğu tespit edilmiştir.

2011, 79 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fonksiyon, Periyodik Fonksiyon, Fourier Dönüşümü, Fourier Analizi, Uygulama

ABSTRACT

MS Thesis

PERIODIC FUNCTIONS and THEIR APPLICATIONS

Ferhat ÖZTÜRK

Atatürk University

Graduate School of Education Sciences

Department of Primary Mathematics Education

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet IŞIK

Periodic functions have become very usable in the field of mathematics, in application areas of mathematics and in other applied sciences, such as physics, physics engineering, electric-electronics engineering, and statistics. Periodic functions are also a subject which is scientifically studied and researched. This study, in which contribution of periodic functions with their theoretical bases and its areas of application, providing great support to the formation of technology and so affecting people's lives closely, aims to investigate periodic functions which have wide applications in applied mathematics, especially in physics and engineering, from a different perspective. In this study, a review of national and international resources was performed and survey method was used. As a result, it was found that in the Fourier analysis there were many application fields which occurred with intensive use of periodic functions and made life easier.

2011, 79 pages

Keywords: Function, Periodic Function, Fourier Transform, Fourier Analysis, Application

TEŞEKKÜR

Bilime, sanata ve tekniğe katkıları sebebiyle tarih sayfalarında ışıldayan isimlerin arkasında güçlü sistemler ve kişiler vardır. Motive eden, yönlendiren, destekleyen faktörlerin uzağında kalmış zihinsel aktiviteler, kulaklarda yankılanmadan toprak olmaya mahkûmdur. Uluslararası rekabetin en etkili araçlarından birini oluşturan bilimsel birikim, varlık iddiasını sürdüren milletlerin vazgeçilmez kaynakları arasında yer alır. Bilginin, becerinin ve üretkenliğin kaynağı olan insana yapılan yatırım her zaman en kârlı yatırımdır.

Bu bağlamda; yardımını, emeğini ve sabrını esirgemeyen danışman hocam sayın Prof. Dr. Ahmet IŞIK'a; ülkemizin saygın kurumları arasında yer alan ve sağladığı bursla yüksek lisans yapmamı kolaylaştıran TÜBİTAK'a; fikir ve tecrübelerinden faydalandığım babam Dursun ÖZTÜRK'e; sevgi ve şefkatini üzerimden eksik etmeyen annem Bilgi ÖZTÜRK'e; Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim ve Ortaöğretim Matematik Ana Bilim Dalının ve Mühendislik Fakültesinin bilgilerinden istifade ettiğim saygıdeğer öğretim elemanlarına; imlâ kuralları açısından tezimi okuyan Bilge BİBER, Tuba KAPLAN, Yunusemre ÖZTÜRK ve Muhammed Orhan ÖZTÜRK'e; moral katkıları sebebiyle babaanneme, amcama ve teyzeme teşekkürü bir borç bilirim.

Ferhat ÖZTÜRK

Ocak 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM	8
3.1. Periyodik Fonksiyonlar	8
3.1.1. Reel değişkenli periyodik fonksiyonlar	8
3.1.2. Kompleks değişkenli periyodik fonksiyonlar	12
3.2. Fourier Serileri	15
3.2.1. Fourier serilerinin katsayıları	18
3.2.2. Yarım aralıkta Fourier açılımı	21
3.2.3. Fourier serilerinin yakınsaklığı	22
3.2.4. Herhangi periyotlu fonksiyonların Fourier serisi	33
3.2.5. Kompleks Fourier serileri	35
3.3. Periyodik Fonksiyonların Uygulamaları	38
3.3.1. Diferansiyel denklemlerin çözümü	40
3.3.2. Elastisite problemlerinin çözümü	44
3.3.3. Yeraltı suyu periyodik davranışının incelenmesi	45
3.3.4. Harmonik analiz	46
3.3.5. Malzeme işleme teknolojisi	48
3.3.6. Makine arızalarının tespiti	51
3.3.7. İnşaat mühendisliğinde salınım ve titreşimlerin hesaplanması	53
3.3.8. Müzik aletleri ses perdelerinin matematiksel ifadesi	60
3.3.9. Böcek seslerinin analizi ve zirai mücadele	63
3.3.10. Tıbbi görüntüleme ve değerlendirmeler	67
3.3.11. Video görüntülerindeki periyodik gürültülerin giderilmesi	71

4. ARAŞTIRMA BULGULARI	73
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	74
KAYNAKLAR	76
ÖZGEÇMİŞ	79

KISALTMALAR DİZİNİ

STFT	Short Time Fourier Transform (Kısa Süreli Fourier Dönüşümü)
FFT	Fast Fourier Transform (Hızlı Fourier Dönüşümü)
GZK	Gerçek Zamanlı Kinematik
GPS	Global Positioning System (Küresel Konumlama Sistemi)

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. $f(x) = x^2$ grafiği	8
Şekil 3.2. $f(x) = x $ grafiği	9
Şekil 3.3. Temsili grafik	9
Şekil 3.4. Yük gerilimi ve akımı	47
Şekil 3.5. Akım harmonikleri	47
Şekil 3.6. Sayısallaştırılmış bir yüzey profili	49
Şekil 3.7. Değişik Fourier katsayılarıyla elde edilen profillerin gerçek profille karşılaştırılması	50
Şekil 3.8. Sinyal çevirim akışı	51
Şekil 3.9. Periyodu bir dönüş olan hareket	52
Şekil 3.10. Karmaşık dalga formunun hızlı Fourier dönüşümüyle harmoniklerine ayrılarak çıkan bilginin frekans ekseninde dizilişinin üç boyutlu görüntüsü	52
Şekil 3.11. Sağlam ve arızalı durumdaki motor akımları	53
Şekil 3.12. Periyodik bir sinyalin Fourier dönüşümü	54
Şekil 3.13. Fourier analizi akış şeması	57
Şekil 3.14. Hızlı Fourier dönüşüm spektrumu	58
Şekil 3.15. İlk yüz veri için hızlı Fourier dönüşüm spektrumu	58
Şekil 3.16. Genlik spektrumu	59
Şekil 3.17. Boğaziçi Köprüsü referans noktaları	59
Şekil 3.18. Boğaziçi Köprüsü'nün güç spektrumları	60
Şekil 3.19. Quadrivium ve bileşenleri	60
Şekil 3.20. Periyodik bir $g(t)$ fonksiyonu	61
Şekil 3.21. Bir keman sesinin zaman-frekans grafiği	62
Şekil 3.22. Fourier analiz programı çalışma şeması	63
Şekil 3.23. Avisoft-SASLab Pro programı	64
Şekil 3.24. Cırcır böceği ses kaydının genlik-zaman grafiği	64
Şekil 3.25. Cırcır böceği genlik-zaman grafiğinin yakınlaştırılmış hali	65
Şekil 3.26. Cırcır böceği ses kaydının Fourier analiz sonucu	65
Şekil 3.27. Yaban arısının ses kaydının genlik-zaman grafiği	65

Şekil 3.28. Yaban arısı genlik-zaman grafiğinin yakınlaştırılmış hali	66
Şekil 3.29. Yaban arısının ses kaydının Fourier analiz sonucu	66
Şekil 3.30. Spektrumun oluşması	68
Şekil 3.31. Doppler etkisinin şematik çizimi	69
Şekil 3.32. Kan akım hızı dalga formu	69
Şekil 3.33. Sınıflandırma sonuçları	70
Şekil 3.34. Pterjiyumlu hastanın ameliyat öncesi ve sonrası göz korneasının Fourier analiz haritaları	71
Şekil 3.35. Periyodik gürültünün giderilmesi	72

1. GİRİŞ

Kelime anlamı bakımından periyodiklik; belli bir zaman aralığında kendini tekrarlayan olguları ifade eder. Periyodiklik; zaman ekseninde şekillenen insan algısının temel yasalarından belki de birisidir. İnsan algısının zamana yönelik kurgu düzeni dünyanın hareketlerine göre şekillenmiştir. Birbiri ardına sıralanan günler, haftalar, mevsimler ya da yıllar periyodiklik içeren algısal olaylardır.

Ancak matematiksel açıdan teorik anlam ifade eden periyodik fonksiyonların gerçek hayata uyarlanması sanıldığı kadar kolay olmamıştır. Periyodik fonksiyonların gerçek hayatla ilişkisinin temelleri Jean Babtiste Joseph Fourier (1768-1830)'in 1822'de yayınlanan "The Analytical Theory of Heat" (Isının Analitik Kuramı) adlı kitabındaki ısının katılarda iletimi prensibine dayandığı söylenebilir (Bracevell R. N., çev., 1991).

Fourier; doğadaki tüm periyodik fonksiyonların, birbirine dik iki farklı periyodik fonksiyonun artan frekanslardaki değerlerinin toplamı şeklinde gösterilebileceğini ileri sürmüştür. Fourier bu toplamı sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını kullanarak göstermiştir. Kreyszig (1967) periyodik fonksiyonların sinüs ve kosinüs gibi basit periyodik fonksiyonlar cinsinden gösteriminin; adi ve kısmi diferansiyel denklemleri içeren çeşitli problemlerle bağlantı kurmada çok güçlü bir araç olduğunu ve bu yüzden kullanışlı, büyük bir öneme sahip olduğunu ifade etmiştir.

Periyodik fonksiyonların trigonometrik fonksiyonlarla gösterim fikri, periyodik olmayan fonksiyonların da bu şekilde gösterilebilme ihtimalini düşündürmüştür. Bu düşünce periyodik olmayan fonksiyonların sonsuz periyotlu periyodik bir fonksiyon olarak ifade edilebileceği fikrini doğurmuştur. Fourier'in çalışmaları üzerine inşa edilen yaklaşımların tümü Fourier analizi olarak nitelendirilmektedir. Fourier analizinde uzun zaman alan hesaplamalar, daha sonra geliştirilen bilgisayar destekli çeşitli algoritmalar yardımıyla kısa zamana indirgenmiştir. Algoritmaların sağladığı bu kolaylık mühendisleri Fourier analizi üzerinde daha yoğun çalışmaya teşvik etmiştir.

Periyodik fonksiyonları temel alan Fourier analizinde, periyodik fonksiyonlar teorisi bir çok mühendislik uygulamasının vazgeçilmez parçası haline gelmiştir.

Bu çalışmanın amacı, periyodik fonksiyonların kuramsal temellerini farklı bir açıdan inceleyerek, günlük hayatla bütünleşen bilimsel ve teknik uygulamalardaki yerini tespit etmektir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Tanım 2.1. Kesin bir tanımı yapılamamakla beraber, sezgisel olarak, küme bazı özelliklere sahip nesnelere bir topluluğu, bir sınıfı, bir koleksiyonu olarak düşünülebilir. Kümeyi meydana getiren nesnelere kümenin elemanları adı verilir (Balcı, 1999).

Tanım 2.2. Elemanları reel sayılar olan kümelere lineer nokta kümeleri denir (Balcı, 1999).

Tanım 2.3. A bir lineer nokta kümesi olsun. Eğer A kümesinin her x elemanı için $x \geq a$ bağıntısını sağlayan bir a sayısı varsa A kümesine alttan sınırlı bir küme denir ve a sayısına da A kümesinin bir alt sınırı adı verilir. Benzer olarak, eğer A nın her x elemanı için $x \leq b$ olacak şekilde bir b reel sayısı varsa A kümesine üstten sınırlı bir küme ve b sayısına da A kümesinin bir üst sınırı adı verilir. Alttan ve üstten sınırlı kümelere kısaca sınırlı kümeler denir (Balcı, 1999).

Tanım 2.4. A reel sayılar kümesinin üstten sınırlı bir alt kümesi ise A kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne A kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $\sup A$ ya da $eküsA$ ile gösterilir. A reel sayılar kümesinin alttan sınırlı bir alt kümesi ise A kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne A nın en büyük alt sınırı veya infimumu denir ve $\inf A$ ya da $ebasA$ ile gösterilir (Balcı, 1999).

Tanım 2.5. A ve B boştan farklı birer küme olmak üzere,

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ ve } y \in B\}$$

ile tanımlanan kümeye A ile B nin kartezyen çarpımı kümesi denir ve $A \times B$ ile gösterilir (Işık, 2002).

Tanım 2.6. $A \times B$ kümesinin herhangi bir alt kümesine A dan B ye bir bağıntı denir ve β ile gösterilir. Eğer $A = B$ ise A dan B ye bir bağıntıya kısaca A da bir bağıntı denir (Işık, 2002).

Tanım 2.7. A ve B iki küme olsun. A dan B ye olan bir f bağıntısı aşağıdaki özelliklere sahipse f ye A dan B ye bir fonksiyondur denir.

- i. Her $x \in A$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde B de en az bir y elemanı vardır.
- ii. $(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f \Rightarrow y = z$ dir (Balcı, 1999).

Tanım 2.8. Bir $f(x)$ fonksiyonu için; eğer $f(-x) = -f(x)$ ise $f(x)$ e tek fonksiyon, eğer $f(-x) = f(x)$ ise $f(x)$ e çift fonksiyon denir (Spiegel, 1991).

Tanım 2.9. R ; reel sayılar kümesini göstermek üzere, $C = \{(x, y) : x, y \in R\}$ sıralı çiftlerinin kümesini alalım. Bu küme üzerinde sırasıyla eşitlik, toplama ve çarpma diye adlandırılan işlemler,

- i. $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$
- ii. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- iii. $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)$

biçiminde tanımlanmış olsun. Üzerindeki bu işlemlerle birlikte düşünüldüğünde, C ye karmaşık sayılar kümesi denir (Başkan, 2005).

Tanım 2.10. Reel değerli fonksiyonlar yardımıyla,

$$\exp z = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

olarak verilen fonksiyona üstel fonksiyon denir (Ocak, 2005).

Tanım 2.11. $\delta > 0$ herhangi bir reel sayı ve $a \in R$ olmak üzere;

$$K = \{x \in R : |x - a| < \delta\}$$

kümesine a nın δ komşuluğu denir. $K' = K \setminus \{a\}$ kümesine de a nın δ delinmiş komşuluğu denir (Kadıoğlu ve Kamali, 2003).

Tanım 2.12. $A \subset R$ ve $a \in R$ olsun. Eğer a nın her delinmiş komşuluğu A kümesinin en az bir elemanını ihtiva ediyorsa $a \in R$ ye A kümesinin yığılma noktası denir. A kümesinin yığılma noktalarından oluşan kümeye A kümesinin yığılma noktalarının kümesi denir (Kadıoğlu ve Kamali, 2003).

Tanım 2.13. $A \subset R$, $f : A \rightarrow R$ bir fonksiyon ve a , A nın yığılma noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa x , a ya yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun limiti L dir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

olarak yazılır (Kadioğlu ve Kamali, 2003).

Tanım 2.14. $A \subset \mathbb{R}$, $f(x): A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ise $f(x)$ fonksiyonu a noktasında süreklidir denir. Eğer $f(x)$ fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise fonksiyon A üzerinde süreklidir denir (Balcı, 1999).

Tanım 2.15. $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığının sonlu sayıdaki noktası hariç diğer noktalarında sürekli ve ayrıca tanımsız ya da süreksiz olduğu sonlu sayıdaki noktalarda sağ ve sol limitleri varsa, $f(x)$ fonksiyonuna $[a, b]$ kapalı aralığında parçalı süreklidir denir (Bayram, 2009).

Tanım 2.16. $f(x)$ fonksiyonu bir D bölgesinde tanımlanmış olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık yalnız ε a bağlı bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı, $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ eşitsizliğini sağlayan tüm $x_1, x_2 \in D$ ler için $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa $f(x)$ e, D bölgesinde düzgün sürekli fonksiyon denir (Halilov, Hasanoğlu ve Can, 2002).

Tanım 2.17. $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, x_0 , A nın bir yığılma noktası ve $f(x): A \rightarrow \mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun. Eğer,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti veya $x = x_0 + h$ için elde edilen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

limiti varsa $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirdir denir ve bu limit $f(x)$ in x_0 noktasındaki türevi adını alır. Bu türev

$$f'(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, Df(x_0)$$

sembollerinden biri ile gösterilir (Balcı, 1999).

Tanım 2.18. C keyfi bir sabit olmak üzere, türevi $f(x)$ olan $F(x)$ ifadesine $f(x)$ in belirsiz integrali ve C ye integrasyon sabiti denir. Bu ifade,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

şeklinde gösterilir (Balcı, 1999).

Tanım 2.19. $f : [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu sınırlı olsun. Eğer

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx = I$$

ise $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilirdir denir ve fonksiyonun bu integrali

$$\int_a^b f(x)dx$$

ile gösterilir (Balcı, 1999).

Tanım: 2.20. $A \subset R$ ve $F(A)$ da A üzerinde tanımlı, reel değerli fonksiyonların kümesi olsun.

$$s : N \rightarrow F(A)$$

şeklinde tanımlanan s fonksiyonuna bir fonksiyon dizisi veya değişken terimli dizi adı verilir (Balcı, 1997).

Tanım 2.21. (a_n) dizisi verilmiş olsun. Genel terimi

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

şeklinde tanımlanan (s_n) dizisini göz önüne alalım. $((a_n), (s_n))$ ikilisine seri denir. a_n terimine serinin genel terimi, (s_n) dizisine de serinin kısmi toplamlar dizisi denir. (Balcı, 1997). Seriyi göstermek için,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

veya

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum a_n$$

kullanılır (Kadioğlu ve Kamali, 2003).

Tanım 2.22. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ve bu serinin (s_n) kısmi toplamlar dizisi verilsin. Eğer (s_n) kısmi toplamlar dizisi bir s sayısına yakınsıyorsa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de s sayısına yakınsıyor denir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

olarak yazılır. Bu s sayısına serinin toplamı denir. Bir sayıya yakınsayan seriye yakınsak seri, yakınsak olmayan seriye ise ıraksak seri denir. (Kadıoğlu ve Kamali, 2003).

Tanım 2.23. Her $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0$ öyle ki $\forall n \geq n_0$ ve $\forall x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) dizisi $f(x)$ fonksiyonuna A üzerinde düzgün yakınsaktır denir (Balcı, 1997).

Tanım 2.24. Bağımsız değişkenleri, bu değişkenlerin fonksiyonlarını ve bu fonksiyonların türevlerini ihtiva eden bir bağıntıya diferansiyel denklem denir (Yıldız, 1998).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Periyodik Fonksiyonlar

Periyodik fonksiyonlar reel değişkenli ve kompleks değişkenli fonksiyonlar olarak iki başlık altında incelenebilir.

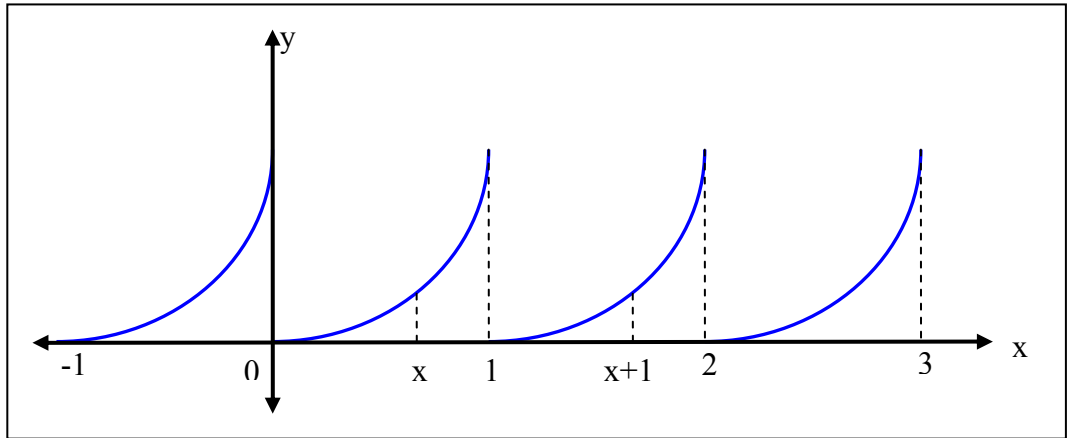
3.1.1. Reel değişkenli periyodik fonksiyonlar

Tanım 3.1. $D \subseteq R$ olmak üzere, $f : D \rightarrow R$ fonksiyonunda, $\forall x \in D$ için, $x + T \in D$ ve $f(x + T) = f(x)$ şartlarını sağlayan sıfırdan farklı bir T reel sayısı varsa, $f(x)$ fonksiyonuna periyodik fonksiyon denir. T sayısına da $f(x)$ fonksiyonunun bir periyodu denir (Aydın, 1999).

Tanım 3.2. $\forall x \in D$ için, $f(x + \ell) = f(x)$ şartını sağlayan $\ell \neq 0$ sayılarından en küçük ve pozitif olanına $f(x)$ fonksiyonunun esas periyodu denir (Nasibov ve Kaçar, 2008).

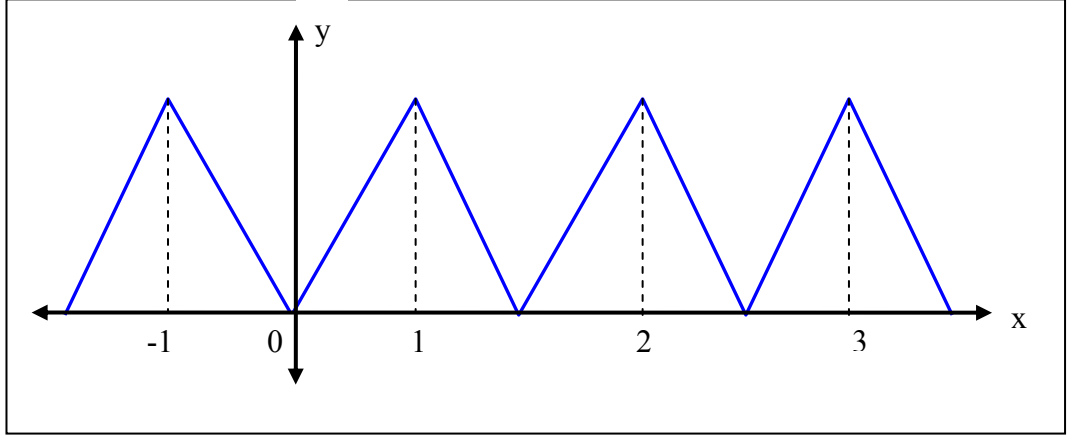
Periyodik fonksiyonlar genellikle trigonometrik fonksiyonları çağırır. Çünkü trigonometrik fonksiyonlar en çok bilinen periyodik fonksiyonlardır. Örneğin $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, ... gibi. Ancak periyodik fonksiyonlar sadece trigonometrik fonksiyonlardan oluşmaz. Örneğin;

i. $f : [0,1] \rightarrow R$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu $\ell = 1$ periyodu ile periyodik fonksiyondur.



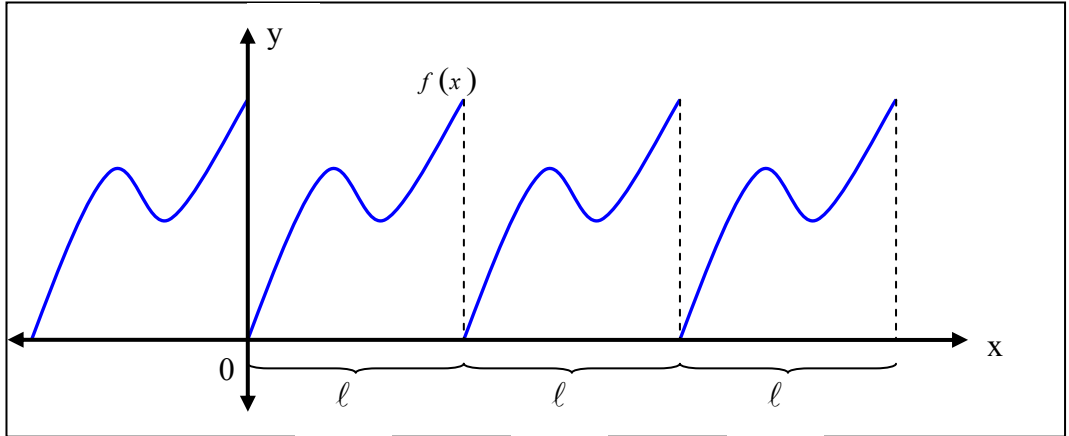
Şekil 3.1. $f(x) = x^2$ grafiği (Nasibov ve Kaçar, 2008)

ii. $f : [-1,1] \rightarrow R$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu $\ell = 2$ periyodu ile periyodik fonksiyondur.



Şekil 3.2. $f(x) = |x|$ grafiği (Nasibov ve Kaçar, 2008)

Bir fonksiyonun ℓ periyotlu olması, o fonksiyonun grafiğinin her ℓ uzunluklu aralıkta aynı şekilde olması demektir. Yani ℓ uzunluklu aralıkta mevcut olan grafik, o aralık öncesi ve sonrasında bulunan ℓ uzunluklu aralıklara kaydırılabilir.



Şekil 3.3. Temsili grafik (Nasibov ve Kaçar, 2008)

O halde periyodik fonksiyonları incelerken orijine yakın olan ℓ uzunluklu aralıkta inceleme yapmak daha uygundur (Nasibov ve Kaçar, 2008).

Bir fonksiyon periyodik olabilir ama esas periyodu bulunmayabilir (Berker, 1993).
Örneğin;

- i. $y(x) = c$ sabit fonksiyonu, bütün reel sayılar kümesinde tanımlanmıştır ve periyodiktir. Yani T reel sayısı için, $y(x+T) = c$ eşitliği yazılır. Fakat bu T sayılarının en küçük bir pozitif değeri mevcut değildir (Halilov vd 2002).

$$\text{ii. } D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \text{ ise} \\ 0, & x \notin Q \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Dirichlet fonksiyonu denir. Görüldüğü gibi, bu fonksiyon periyodiktir ve her r rasyonel sayısı bu fonksiyonun bir periyodudur. Gerçekten, önce x in rasyonel bir sayı olduğunu varsayalım; böyle olunca $x+r$ sayısı da rasyoneldir ve bunun sonucu olarak $D(x+r)=1$ dir; o halde her x rasyonel sayısı için, $D(x+r)=D(x)$ dir. Şimdi x in bir irrasyonel sayı olduğunu varsayalım, böyle olunca $x+r$ sayısı da irrasyoneldir ve bunun sonucu olarak, $D(x+r)=0$ dır; bu halde de $D(x+r)=D(x)$ dir. Dolayısıyla x ister rasyonel olsun ister irrasyonel olsun, $D(x+r)=D(x)$ dir, yani her r rasyonel sayısı D nin bir periyodudur. Bu yapılanlara göre Dirichlet fonksiyonunun pozitif periyotları, rasyonel ve pozitif sayıların tümüdür. Oysaki rasyonel ve pozitif sayıların en küçüğü yoktur, çünkü r_1 rasyonel ve pozitif bir sayı ise, $\frac{r_1}{2}$ de rasyonel ve pozitif bir sayıdır ve $\frac{r_1}{2} < r_1$ dir. Dolayısıyla Dirichlet fonksiyonu periyodiktir ama esas periyodu yoktur (Berker, 1993).

Teorem 3.1. $D \subseteq R$, $f : D \rightarrow R$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonu periyodik ve esas periyodu T ise, bu fonksiyonun bütün periyotları $n = \mp 1, \mp 2, \dots$ olmak üzere, $p = nT$ şeklindedir.

İspat: p sayısı, $f(x)$ fonksiyonunun herhangi bir periyodu ve T sayısının p den büyük olmayan en büyük tam katı nT olsun; n tamsayısı,

$$nT \leq p < (n+1)T \quad (3.1)$$

eşitsizliğini sağlar. Önce $n = 0$ olduğunu varsayalım; (3.1) eşitsizliği

$$0 \leq p < T \quad (3.2)$$

olur; T esas periyodu pozitif periyotların en küçüğü olduğundan, $0 < p < T$ olamaz; diğer taraftan periyodik fonksiyon tanımından $p \neq 0$ dir. Öyleyse, (3.2) eşitsizliği sağlanmaz, yani $n = 0$ olamaz ve n sayısı $\{\mp 1, \mp 2, \dots\}$ kümesindeki sayılardan biri olmalıdır.

(3.1) eşitsizliğinden

$$0 \leq p - nT < T \quad (3.3)$$

eşitsizliği elde edilir. $p - nT$ sayısı, $f(x)$ fonksiyonunun bir periyodudur çünkü

$$f(x + p - nT) = f(x + p) = f(x)$$

eşitliği sağlanır. (3.3) eşitsizliğinden dolayı $p - nT \geq 0$ ve $p - nT < T$ olmalıdır. Oysa, $f(x)$ fonksiyonunun en küçük pozitif periyodu T dir; o halde $p - nT = 0$, yani $p = nT$ olmalıdır (Berker, 1993).

Teorem 3.2. $f : R \rightarrow R$ fonksiyonunda $\forall x \in R$ için $f(x + T) = f(x)$ şartını sağlayan T reel sayılarının kümesi,

$$P = \{T : \forall x \in R \text{ için } f(x + T) = f(x)\}$$

olsun. Bu durumda,

i. $T_1, T_2 \in P$ ise $T_1 + T_2 \in P$ ve $T_2 - T_1 \in P$ dir.

ii. $ebasP = \ell$ ve $\ell > 0$ ise $\ell \in P$ dir.

İspat:

i. $T_1, T_2 \in P$ olduğundan, $f(x + T_2) = f(x)$ dir. Bu eşitlikte, x yerine $x + T_1$ konularak

$$f((x + T_1) + T_2) = f(x + T_1) = f(x)$$

ya da

$$f(x + (T_1 + T_2)) = f(x)$$

bulunur. Öyleyse $T_1 + T_2 \in P$ dir.

$f(x + T_2) = f(x)$ eşitliğinde x yerine $x - T_1$ konularak

$$f((x - T_1) + T_2) = f(x - T_1)$$

ya da

$$f(x + (T_2 - T_1)) = f(x - T_1)$$

elde edilir.

$f(x)$ fonksiyonunda $f(x) = f(x + T_1)$ olduğundan, bu eşitlikte x yerine $x - T_1$ konulduğunda

$$f(x - T_1) = f(x - T_1 + T_1) = f(x)$$

bulunur. Buna göre

$$f(x + (T_2 - T_1)) = f(x - T_1) = f(x)$$

olduğundan, $T_2 - T_1 \in P$ dir.

ii. $ebasP = \ell$ ve $\ell > 0$ ise $\forall T \in P$ için $\ell \leq T$ dir. $\forall T \in P$ için $\ell < T$ olduğunu varsayalım. Bu halde, $\ell \notin P$ dir. $ebasP = \ell$ olduğundan, $\forall \varepsilon \in R^+$ için $\ell < T \leq \ell + \varepsilon$ olacak şekilde P kümesinin en az bir T elemanı vardır. $\ell < T \leq \ell + \varepsilon$ koşulunu sağlayan T lerin en küçüğü T_1 olsun. $0 < \varepsilon < T_1 - \ell$ olacak şekilde seçeceğimiz ε sayısı için $\ell + \varepsilon < T_1$ olur. Bu durumda, $\forall T \in P$ için, $\ell + \varepsilon < T$ dir. Bu ise ℓ nin $ebasP$ olmasına aykırıdır. Öyleyse $\ell \in P$ dir (Aydın, 1999).

3.1.2. Kompleks değişkenli periyodik fonksiyonlar

Tanım 3.3. C kompleks sayılar kümesi olmak üzere, $D \subset C$ bölgesinde tanımlanmış bir $f(z)$ fonksiyonu ve en az bir $2w$ kompleks sayısı için $z_2 \approx z_1 = m2w$ ($m \in Z$) olmak üzere $\forall z_1, z_2 \in D$ için $f(z_1) = f(z_2)$ ise bu durumda $f(z)$ ye $2w$ periyoduna göre periyodik fonksiyon denir (Dutta ve Debnath, 1965; Işık, 1987).

Teorem 3.3. Eğer $2w$, $f(z)$ fonksiyonunun periyodu ise $m \in Z$ olmak üzere $m2w$ de $f(z)$ fonksiyonunun periyodudur.

İspat:

i. m herhangi bir pozitif tamsayı olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f(z + m2w) &= f(z + (m-1)2w + 2w) \\ &= f(z + (m-1)2w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(z + (m-2)2w + 2w) \\
&= f(z + (m-2)2w) \\
&= \dots\dots\dots \\
&= \dots\dots\dots \\
&= f(z)
\end{aligned}$$

bulunur.

ii. m herhangi bir negatif tamsayı olsun.

Bu durumda

$$f(z - m2w) = f(z - m2w + m2w) = f(z)$$

bulunur ve bu şekildeki periyotların $\Omega = \{m2w\}$ kümesi sonsuzdur (Dutta ve Debnath, 1965).

Teorem 3.4. Eğer bir $f(z)$ periyodik fonksiyonunun periyotlarının bir kümesi $\{2w_1, 2w_2, 2w_3, \dots\}$ ise $\sum_{r=1}^n m_r 2w_r, m_r \in Z$ toplamı da bu fonksiyonun bir periyodudur.

İspat:

$$\begin{aligned}
f\left(z + \sum_{r=1}^n m_r 2w_r\right) &= f\left(z + \sum_{r=2}^n m_r 2w_r + m_1 2w_1\right) \\
&= f\left(z + \sum_{r=2}^n m_r 2w_r\right) \\
&= f\left(z + \sum_{r=3}^n m_r 2w_r + m_2 2w_2\right) \\
&= f\left(z + \sum_{r=3}^n m_r 2w_r\right) \\
&= \dots\dots\dots \\
&= f(z)
\end{aligned}$$

bulunur (Dutta ve Debnath, 1965).

Herhangi bir sayı sabit bir fonksiyonun periyodu olarak alınabilir (Dutta ve Debnath, 1965).

Teorem 3.5. Eğer $f(z)$ ve $g(z)$ aynı periyotlu periyodik fonksiyonlar ise $f(z) \mp g(z)$, $f(z).g(z)$ ve $\frac{f(z)}{g(z)}$, ($g(z) \neq 0$) periyodik fonksiyonları da aynı periyotludur. (Dutta ve Debnath, 1965).

Teorem 3.6. Bir periyodik fonksiyonun türevi de aynı periyot veya periyotlarla periyodik fonksiyondur.

İspat: $f(z)$, $2w$ periyotlu bir periyodik fonksiyon olsun. Periyodik fonksiyonların tanımından

$$f(z + 2w) = f(z)$$

yazılır.

Buradan

$$f'(z + 2w) = f'(z)$$

olur (Dutta ve Debnath, 1965).

Tanım 3.4. Periyotları $2w_1$ şeklinde ifade edilebilen bir $f(z)$ periyodik fonksiyonuna basit periyodik fonksiyon ve $2w_1$ e de $f(z)$ fonksiyonunun esas periyodu denir (Dutta ve Debnath, 1965; Işık, 1987).

Tanım 3.5. Bir basit periyodik fonksiyonun esas periyodu ($2w_1$) tarafından oluşturulan şerit, periyot şeridi olarak ifade edilir (Dutta ve Debnath, 1965).

Tanım 3.6. 0 ve $2w_1$ ya da $-w_1$ ve w_1 noktalarından geçen iki paralel doğrular arasında kalan şeride esas periyot-şeridi denir (Dutta ve Debnath, 1965).

Kolaylık olması açısından; periyodik fonksiyonların incelenmesini herhangi bir periyot şeridine sınırlamak yeterlidir (Dutta ve Debnath, 1965).

3.2. Fourier Serileri

Fransız fizikçi ve matematikçi J. B. Joseph Fourier tarafından 1807’de tanımlanan Fourier serileri; teorisinin zorluğuna karşı uygulamaları kolay olan, fizik ve mühendislikte pek çok uygulama alanı bulunan önemli serilerden biridir. Fizikte elektromanyetik teori, kuantum teorisi, ısı teorisi, akustik, elektronik gibi çeşitli alanlardaki uygulamalarda, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinde çoğu kez Fourier serileriyle karşılaşılır. Fourier serileri, periyodik fonksiyonların özellikleri iyi bilinen sinüs ve kosinüs fonksiyonları cinsinden yeniden yazılmasından ibarettir ve bu yazılımın önemi özellikle uygulamada kendini göstermektedir. Çünkü bir tek frekans veya dalga sayısı içeren $e^{i\omega t}$ veya $\sin \omega t$ şeklindeki periyodik ve sinüzoidal (harmonik) fonksiyonlarla uğraşmanın kolaylıklarına karşı, pek çok olayda periyodik olmakla birlikte zamana göre sinüzoidal olmayan büyüklüklerle de uğraşmak zorunda kalınır. İşte bu gibi durumlarda karşılaşılan matematiksel problemler, periyodik fonksiyonların Fourier serisine açılmasıyla aşılr (Önem, 1998).

Tanım 3.7. 2π periyotlu bir $f(x)$ fonksiyonu; $(-\pi, \pi)$ aralığında tek değerli, sürekli veya parçalı sürekli ve bir periyot aralığında sonlu sayıda maksimum ve minimuma sahip, ayrıca $f(x)$ in mutlak değerinin $[-\pi, \pi]$ aralığındaki integrali

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \text{sonlu} < \infty$$

ise $f(x)$ Dirichlet koşullarını sağlıyor denir (Önem, 1998).

Tanım 3.8. 2π periyotlu bir $f(x)$ fonksiyonu Dirichlet koşullarını sağlıyorsa trigonometrik bir seri ile gösterilebilir.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

şeklinde olan bu seriye Fourier serisi denir (Yarasa, 1976).

Teorem 3.7. Eğer m ve n pozitif tamsayı ise

i.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

ii.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

iii.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$$

olur.

İspat:i. Eğer $m \neq n$ ise,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Eğer $m = n$ ise,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2mx) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2mx}{2m} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

olur.

ii. Eğer $m \neq n$ ise,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur.

Eğer $m = n$ ise,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2mx) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2mx}{2m} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \pi \end{aligned}$$

olarak bulunur.

iii. Eğer $m \neq n$ ise,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur.

Eğer $m = n$ ise,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nxdx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos mx dx \\
&= \frac{\sin^2 mx}{2m} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur (Dönmez, 1996).

3.2.1. Fourier serilerinin katsayıları

2π periyotlu $f(x)$ fonksiyonu $(-\pi, \pi)$ aralığında yakınsak

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (3.4)$$

trigonometrik serisi ile temsil edilmiş olsun.

Birinci taraftaki fonksiyonun integrali (3.4) eşitliğinin sağ tarafındaki serinin terimlerinin integrallerinin toplamına eşit olduğundan, bu seride tanımlanan a_0, a_n ve b_n katsayıları hesaplanabilir.

İlk olarak a_0 katsayısını hesaplamak için (3.4) eşitliğinin her iki tarafının $-\pi$ den $+\pi$ ye kadar terim terim integralleri alınırsa,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nxdx \right]$$

elde edilir. İkinci taraftaki her bir integral hesaplanırsa,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi a_0$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx dx = \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{+\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx dx = \frac{-\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{+\pi} = 0$$

elde edilir. Buna göre,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx = \pi a_0$$

olur. Buradan

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx \quad (3.5)$$

bulunur.

$k \neq 0$ için (3.4) eşitliğinin her iki tarafını terim terim $\cos kx$ ile çarpılırsa

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının $-\pi$ den $+\pi$ ye kadar integrali alınırsa,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \cos kx dx \right)$$

olur. Bu eşitlikte ikinci taraftaki terimlerden a_k katsayılı olanı hariç hepsi Teorem 3.7. gereğince sıfır olacağından,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx dx = a_k \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 kx dx = \pi a_k$$

olur. Buradan

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx dx \quad (3.6)$$

elde edilir.

b_k katsayısını belirlemek için de (3.4) eşitliğinin her iki tarafı $\sin kx$ ile çarpılarak her bir terimin $-\pi$ den $+\pi$ ye kadar integralleri hesaplanırsa,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \sin kx dx + b_n \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \sin kx dx \right)$$

elde edilir. Buradan da ikinci taraftaki terimlerden b_k katsayılı olanı hariç hepsi Teorem 3.7. gereğince sıfır olacağından,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx dx = b_k \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 kx dx = \pi b_k$$

olur. Buradan da

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx dx \quad (3.7)$$

elde edilir.

(3.5), (3.6), (3.7) formülleri ile tanımlı katsayılara $f(x)$ fonksiyonunun Fourier katsayıları ve bu katsayılarla oluşturulmuş (3.4) trigonometrik serisine de $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi denir (Karadeniz, 2000).

Tanım 3.9. $f(x)$ fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olsun.

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

olmak üzere,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun Fourier kosinüs serisi denir (Bayram, 2009).

Tanım 3.10. $f(x)$ fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olsun.

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

olmak üzere,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun Fourier sinüs serisi denir (Bayram, 2009).

3.2.2. Yarım aralıkta Fourier açılımı

$(0, \pi)$ aralığında tanımlanmış herhangi bir fonksiyon $(0, \pi)$ aralığında yalnız kosinüs terimlerini kapsayan Fourier kosinüs serisi ile gösterilebileceği gibi, yalnız sinüs terimlerini kapsayan Fourier sinüs serisi ile de gösterilebilir. Şöyle ki; $(0, \pi)$ aralığında tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu $(-\pi, 0)$ aralığına y-eksenine göre simetriği alınarak çift fonksiyon olacak şekilde uzatılır. Böylece $(-\pi, \pi)$ aralığında 2π periyotlu çift fonksiyon elde edilir. Bu fonksiyon kosinüs serisi ile gösterilir. Benzer olarak $(0, \pi)$ aralığında tanımlanmış olan $f(x)$ fonksiyonu $(-\pi, 0)$ aralığına orijine göre simetriği alınarak uzatılırsa $(-\pi, \pi)$ aralığında 2π periyotlu tek fonksiyon olacağından bu fonksiyon sinüs serisi ile gösterilir (Yarasa, 1976).

3.2.3. Fourier serilerinin yakınsaklığı

Teorem 3.8. $f(x)$ fonksiyonu 2π periyodu ile periyodik bir fonksiyon ve $f'(x)$ türevi $[-\pi, \pi]$ kapalı aralığında parçalı sürekli ise, $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi her bir x_0 için;

$$\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$$

değerine yakınsar yani a_0, a_k ve b_k $f(x)$ fonksiyonunun Fourier katsayıları olmak üzere

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0) = \frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$$

dir.

İspat: $f(x)$ fonksiyonunun a_0, a_k ve b_k katsayılı Fourier serisi

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ ve x_0 sabiti için,

$$s_n(x_0) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0) \quad (3.8)$$

ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$$

olduğunu gösterelim. Şimdi (3.8) de a_0, a_k ve b_k katsayılarını yerlerine yazalım.

$$s_n(x_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right) + \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \right) \cos kx_0 + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right) \sin kx_0 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{2} dx + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \cos kx_0 dx \right) + \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \sin kx_0 dx \right) \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{2} dx + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) \cos kx \cos kx_0 + f(x) \sin kx \sin kx_0) dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{2} dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) [\cos kx \cos kx_0 + \sin kx \sin kx_0] dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{2} dx + \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx - kx_0) dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{2} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=1}^n \cos(kx - kx_0) \right] f(x) dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x - x_0) \right] dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) F_n(x - x_0) dx \\
&= \frac{d}{\pi} \int_{-x_0-\pi}^{-x_0+\pi} f(x_0 + u) F_n(u) du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + u) F_n(u) du
\end{aligned}$$

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + x) F_n(x) dx$$

olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\int_0^{\pi} F_n(x) dx = \frac{\pi}{2}$ ve $\int_{-\pi}^0 F_n(x) dx = \frac{\pi}{2}$ olduğundan;

$$s_n(x_0) - \frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + x) F_n(x) dx - \frac{1}{2} f(x_0 - 0) - \frac{1}{2} f(x_0 + 0)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x_0 + x) F_n(x) dx - \frac{1}{2} f(x_0 - 0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x_0 + x) F_n(x) dx - \frac{1}{2} f(x_0 + 0)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x_0 + x) F_n(x) dx - \frac{1}{\pi} f(x_0 - 0) \int_{-\pi}^0 F_n(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x_0 + x) F_n(x) dx \\
&\quad - \frac{1}{\pi} f(x_0 + 0) \int_0^{\pi} F_n(x) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x_0 + x) F_n(x) dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x_0 - 0) F_n(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x_0 + x) F_n(x) dx \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x_0 + 0) F_n(x) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x_0 + x) F_n(x) dx - \int_{-\pi}^0 f(x_0 - 0) F_n(x) dx \right] \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} f(x_0 + x) F_n(x) dx - \int_0^{\pi} f(x_0 + 0) F_n(x) dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x_0 + x) F_n(x) - f(x_0 - 0) F_n(x)] dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x_0 + x) F_n(x) - f(x_0 + 0) F_n(x)] dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x_0 + x) - f(x_0 - 0)] F_n(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x_0 + x) - f(x_0 + 0)] F_n(x) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x_0 + x) - f(x_0 - 0)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x_0 + x) - f(x_0 + 0)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x_0 + x) - f(x_0 - 0)] \left[\frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \sin nx + \frac{\cos nx}{2} \right] dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x_0+x) - f(x_0+0)] \left[\frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \sin nx + \frac{\cos nx}{2} \right] dx \\
& = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x_0+x) - f(x_0-0)}{x} \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2} \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x_0+x) - f(x_0-0)}{2} \cos nx dx \\
& + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0+x) - f(x_0+0)}{x} \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2} \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0+x) - f(x_0+0)}{2} \cos nx dx \\
& = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 \left[\frac{f(x_0+x) - f(x_0-0)}{x} \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2} \right] \sin nx dx + \int_{-\pi}^0 \frac{f(x_0+x) - f(x_0-0)}{2} \cos nx dx \right. \\
& \left. + \int_0^{\pi} \left[\frac{f(x_0+x) - f(x_0+0)}{x} \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2} \right] \sin nx dx + \int_0^{\pi} \frac{f(x_0+x) - f(x_0+0)}{2} \cos nx dx \right\} \\
& \phi_1(x) = \frac{f(x_0+x) - f(x_0-0)}{x} \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2} \quad , \quad \phi_2(x) = \frac{f(x_0+x) - f(x_0-0)}{2} \\
& \phi_3(x) = \frac{f(x_0+x) - f(x_0+0)}{x} \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2} \quad \text{ve} \quad \phi_4(x) = \frac{f(x_0+x) - f(x_0+0)}{2}
\end{aligned}$$

olarak ifade edilen, ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 ve ϕ_4 fonksiyonları sırasıyla $[-\pi, 0]$, $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$ ve $[0, \pi]$ aralıklarında parçalı sürekli ve integrallenebilirdir. Eğer $f(x)$ fonksiyonu verilen bir $[a, b]$ aralığında integrallenebilirse,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos nxdx = 0$$

olacağından,

$$\int_0^{\pi} \phi_3(x) \sin nxdx = 0 \quad \text{ve} \quad \int_0^{\pi} \phi_4(x) \cos nxdx = 0$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ s_n(x_0) - \frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)] \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \phi_1(x) \sin nxdx + \int_{-\pi}^0 \phi_2(x) \cos nxdx + \int_0^{\pi} \phi_3(x) \sin nxdx + \int_0^{\pi} \phi_4(x) \cos nxdx \right] \right] \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$$

elde edilir. Bu da $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisinin x_0 noktasında

$$\frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$$

değerine yakınsaması anlamına gelir. Yani

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0) = \frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$$

olması demektir. Böylece ispat tamamlanmış olur (Bayram, 2009).

Teorem 3.9. (yakınsaklık koşulu): $f(x)$ ve $f'(x)$ türevi $(-\pi, \pi)$ aralığında parçalı sürekli ise $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi her bir $x \in (-\pi, \pi)$ için, $f(x+) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h)$ olmak üzere;

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

değerine yakınsar ve $x = \mp\pi$ için,

$$\frac{f(\pi+) + f(\pi-)}{2}$$

değerine yakınsar. Yani $x \in (-\pi, \pi)$ için,

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

elde edilir ve buradan,

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n (-1)^n] = \frac{f(\pi+) + f(\pi-)}{2}$$

yazılır.

İspat: $f(x)$ fonksiyonunun tanımlı olduğu her bir $x \in (-\pi, \pi)$ için $g_1(x) = f(x)$ yazalım. Şimdi $g_1(x)$ fonksiyonunu $g_1(x) = g(x + 2k\pi)$ şeklinde periyodik (burada periyot 2π dir) olarak $g(x)$ fonksiyonuna genişletelim. $\forall x$ için,

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] = \frac{g(x+) + g(x-)}{2}$$

olur. Burada a_0, a_n ve b_n , $g(x)$ fonksiyonunun Fourier katsayılarıdır ve $f(x)$ fonksiyonunun Fourier katsayıları ile aynıdır. Dolayısıyla $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi her $x \in R$ için,

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] = \frac{g(x+) + g(x-)}{2}$$

eşitliğini sağlar. $x \in (-\pi, \pi)$ için, $g(x-) = f(x-)$ ve $g(x+) = f(x+)$ olduğundan,

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

yazılır. $x = \pi$ olsun. $g(x)$ in periyodikliğinden,

$$g(\pi+) = g(\pi - 2\pi+) = g(-\pi+) = f(-\pi+)$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\pi + b_n \sin n\pi] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n = \frac{f(-\pi+) + f(\pi-)}{2}$$

yazılır. Benzer şekilde $x = -\pi$ olduğunda

$$g(-\pi-) = g(-\pi + 2\pi-) = g(\pi-) = f(\pi-)$$

olacağından,

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n(-\pi) + b_n \sin n(-\pi)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n = \frac{f(-\pi+) + f(\pi-)}{2}$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatıdır (Bayram, 2009).

Teorem 3.10. $[-\pi, \pi]$ aralığında integrallenebilir bir $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisinin bir x_0 noktasında bir s sayısına yakınsak olması için gerek ve yeter şart;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} [f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2s] F_n(x) dx = 0$$

olmasıdır.

İspat: $f(x)$ fonksiyonunun Fourier katsayıları a_0, a_k ve b_k olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisinin $n+1$. kısmi toplamı;

$$s_n(x_0) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0)$$

olsun. Bu durumda,

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + x) F_n(x) dx = 0$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned} s_n(x_0) - s &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + x) F_n(x) dx - s \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x_0 + x) F_n(x) dx + \int_0^{\pi} f(x_0 + x) F_n(x) dx \right] - s \\ &= \frac{1}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 f(x_0 - t) F_n(-t) dt + \int_0^{\pi} f(x_0 + x) F_n(x) dx \right] - s \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} [f(x_0 - x) F_n(x) + f(x_0 + x) F_n(x)] dx - s\pi \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} [f(x_0 - x) + f(x_0 + x) - 2s] F_n(x) dx \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatıdır (Bayram, 2009).

Teorem 3.11. $f(x)$ fonksiyonu $[-\pi, \pi]$ aralığında türevlenebilir olsun. $f(x)$ in, $f'(x)$ türev fonksiyonu $[-\pi, \pi]$ aralığında parçalı sürekli ve $f(-\pi) = f(\pi)$ oluyorsa $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi $[-\pi, \pi]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

İspat: $f(x)$ fonksiyonunun Fourier katsayılarını a_n , b_n ile ve $f'(x)$ türev fonksiyonunun Fourier katsayılarını da a'_n , b'_n ile gösterelim. Bu durumda her n için,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx ; u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx, \cos nx dx = dv \Rightarrow v = \frac{\sin nx}{n} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\left(f(x) \frac{\sin nx}{n} \right) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{n} f'(x) dx \right] \\ &= -\frac{1}{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = -\frac{1}{n} b'_n \Rightarrow a_n = -\frac{1}{n} b'_n \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx ; u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx, \sin nx dx = dv \Rightarrow v = -\frac{\cos nx}{n} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[f(x) \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) dx \right] \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx = \frac{1}{n} a'_n \Rightarrow b_n = \frac{1}{n} a'_n \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, her n için $b'_n = -na_n$ ve $a'_n = nb_n$ elde edilir. (a'_n) ve (b'_n) dizileri $f'(x)$ fonksiyonunun Fourier katsayıları olduğundan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a'_n}{n} \right| \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{b'_n}{n} \right|$$

serileri yakınsaktır.

$$|a_n| = \left| \frac{b'_n}{n} \right| \quad \text{ve} \quad |b_n| = \left| \frac{a'_n}{n} \right|$$

olduğundan, bunların serileri yakınsaktır. Dolayısıyla yakınsak iki serinin toplamı olan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} [|a_n| + |b_n|]$$

serisi yakınsaktır. Her n ve $\forall x \in [-\pi, \pi]$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n + b_n|)$$

serisi yakınsaktır. Her n ve $\forall x \in [-\pi, \pi]$ için,

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n \cos nx| + |b_n \sin nx| = |a_n| |\cos nx| + |b_n| |\sin nx| \leq |a_n| \cdot 1 + |b_n| \cdot 1$$

ve $\sum (|a_n + b_n|)$ serisi yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ fonksiyon serisi $[-\pi, \pi]$ aralığında düzgün yakınsak olur.

Böylece,

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

fonksiyon serisi $[-\pi, \pi]$ aralığında düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla bu fonksiyon serisi $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. O halde $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi $[-\pi, \pi]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar (Bayram, 2009).

Sonuç 3.1. $f(x)$ fonksiyonu $[-\pi, \pi]$ aralığında türevlenebilir olsun. $f(x)$ fonksiyonunun türevi $f'(x)$ fonksiyonu $[-\pi, \pi]$ aralığında parçalı sürekli ve $f(\pi) = f(-\pi)$ ise, a_k ve b_k $f(x)$ fonksiyonunun Fourier katsayıları olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} n b_n = 0$$

dir (Bayram, 2009).

Sonuç 3.2. $f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(p-1)}(x)$ fonksiyonları $[-\pi, \pi]$ aralığında tanımlı ve türevlenebilir olsun. $f^{(p)}(x)$ fonksiyonu $[-\pi, \pi]$ aralığında integrallenebilir ve $f(\pi) = f(-\pi), f'(\pi) = f'(-\pi), \dots, f^{(p-1)}(\pi) = f^{(p-1)}(-\pi)$ ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} n^p b_n = 0$$

olur (Bayram, 2009).

Teorem 3.12. (Parseval özdeşliği): Bir $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi düzgün olarak $f(x)$ fonksiyonuna yakınsarsa, a_0, a_k ve b_k $f(x)$ fonksiyonunun Fourier katsayıları olmak üzere;

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

dir. Bu özdeşliğe Parseval özdeşliği denir. Parseval özdeşliği, $f(x)$ fonksiyonunun integrallenebilir olması halinde, yani $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi yakınsak olsun olmasın sağlanır (Bayram, 2009).

İspat:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

eşitliğinin her iki tarafı $f(x)$ fonksiyonu ile çarpılarak $(-\pi, \pi)$ aralığında terim terim integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} f(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] f(x) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_0}{2} \cdot \pi a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \pi a_k + b_k \cdot \pi b_k) \\
&= \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right)
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

elde edilir.

3.2.4. Herhangi periyotlu fonksiyonların Fourier serisi

$f(x)$ fonksiyonu $2l$ periyotlu bir fonksiyon olsun. $l \neq \pi$ kabul ederek bu fonksiyonu Fourier serisine açalım. Bunun için de,

$$x = \frac{2l}{2\pi} t = \frac{l}{\pi} t$$

değişken dönüşümünü yapalım. Bu takdirde,

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$$

fonksiyonu t nin 2π periyotlu bir fonksiyonu olur. Çünkü

$$\begin{aligned}
f\left[\frac{l}{\pi}(t+2\pi)\right] &= f\left(\frac{l}{\pi}t + 2l\right) = f(x+2l) \\
&= f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)
\end{aligned}$$

dır. O halde $f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ fonksiyonu $-\pi \leq t \leq \pi$ aralığında Fourier serisine açılabilir. Yani,

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (3.9)$$

yazılabilir. Burada,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \cos kt dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \sin kt dt$$

dır. Şimdi de tekrar x değişkenine dönelim.

$$x = \frac{l}{\pi}t, \quad t = \frac{\pi}{l}x, \quad dt = \frac{\pi}{l}dx$$

olarak

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} f(x) \frac{\pi}{l} dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx$$

elde edilir. Bu takdirde (3.9) ifadesi de,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right)$$

şeklini alır ki bu da bize $2l$ periyotlu bir fonksiyonun Fourier serisini verir (Karadeniz, 2000).

3.2.5. Kompleks Fourier serileri

Fourier serilerinin fizik ve mühendislikteki bazı uygulamalarında fonksiyonların kompleks şeklindeki Fourier açılımlarında ve katsayılar da önemli sayılabilecek kısalık ve netlikler ortaya çıktığı için, Fourier serilerinin incelenmesinde serinin kompleks üstel fonksiyonlar cinsinden ifade edilmesine ihtiyaç duyulur.

Tanım 3.11. $[-l, l]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisinin

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right) \quad (3.10)$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi,

$$\cos \frac{k\pi}{l} x = \frac{1}{2} \left(e^{i\left(\frac{k\pi}{l}\right)x} + e^{-i\left(\frac{k\pi}{l}\right)x} \right)$$

$$\sin \frac{k\pi}{l} x = \frac{1}{2i} \left(e^{i\left(\frac{k\pi}{l}\right)x} - e^{-i\left(\frac{k\pi}{l}\right)x} \right)$$

özdeşliklerini kullanarak (3.10) serisini yeniden yazalım. Bu durumda

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2} a_k + \frac{1}{2i} b_k \right) e^{i\left(\frac{k\pi}{l}\right)x} + \left(\frac{1}{2} a_k - \frac{1}{2i} b_k \right) e^{-i\left(\frac{k\pi}{l}\right)x} \right] \quad (3.11)$$

olur. Şimdi aşağıdaki düzenlemeleri yapalım.

$$c_k = \frac{1}{2} a_k + \frac{1}{2i} b_k = \frac{1}{2} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \left(\frac{k\pi}{l} x \right) dx + \frac{1}{2i} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \left(\frac{k\pi}{l} x \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \left[\cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) - i \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \right] dx \\
&= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i\left(\frac{k\pi}{l}\right)x} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{-k} &= \frac{1}{2} a_k - \frac{1}{2i} b_k = \frac{1}{2} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx - \frac{1}{2i} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx \\
&= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{i\left(\frac{k\pi}{l}\right)x} dx
\end{aligned}$$

ve

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

olsun. Bu katsayılar kullanılarak (3.11) serisi yeniden

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[c_k e^{i\left(\frac{k\pi}{l}\right)x} + c_{-k} e^{-i\left(\frac{k\pi}{l}\right)x} \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\left(\frac{k\pi}{l}\right)x} \quad (3.12)$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i\left(\frac{k\pi}{l}\right)x} dx$$

dir ve k pozitif, negatif ya da sıfır olabilir. İşte (3.12) serisine $f(x)$ fonksiyonunun kompleks Fourier serisi denir. Eğer $f(x)$ çift fonksiyon ise $c_{-k} = c_k$, tek fonksiyon ise $c_{-k} = -c_k$ olur (Bayram, 2009).

Tanım 3.12. Her sonlu $(-l, l)$ aralığında Dirichlet koşullarını sağlayan ve $(-\infty, \infty)$ aralığında mutlak yakınsak olan $f(x)$ fonksiyonunun;

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\left(\frac{k\pi}{l}\right)x} \quad (3.13)$$

ile tanımlanan kompleks Fourier serisini ele alalım. Burada c_k katsayıları;

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i\left(\frac{k\pi}{l}\right)x} dx \quad (3.14)$$

ile tanımlı olup, c_k yı (3.13) de yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i\left(\frac{k\pi}{l}\right)x} dx \right] e^{i\left(\frac{k\pi}{l}\right)x} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(u) e^{-i\left(\frac{k\pi}{l}\right)u} du \right] e^{i\left(\frac{k\pi}{l}\right)x} \cdot \frac{\pi}{l} \end{aligned} \quad (3.15)$$

şeklinde yazılır. Bu toplamın $l \rightarrow \infty$ için limitini araştıralım. $\frac{\pi}{l} = \alpha$ ile gösterilirse

$l \rightarrow \infty$ için $\alpha \rightarrow 0$ olur ve ardışık iki periyot arasındaki fark; $\frac{(n+1)\pi}{l} - \frac{n\pi}{l} = \frac{\pi}{l}$ olup,

(3.15) de $\frac{\pi}{l}$ yerine $\Delta\alpha$ yazılırsa;

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(u) e^{-ik\Delta\alpha u} du \right] e^{ik\Delta\alpha x} \Delta\alpha \quad (3.16)$$

$l \rightarrow \infty$, $\Delta\alpha \rightarrow 0$ için limite geçildiğinde (3.16) dan belirli integralin tanımına göre;

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\alpha u} du \right] e^{i\alpha x} d\alpha \quad (3.17)$$

bulunur.

$f(x)$ ile yapılan bu işlemlerin geçerli olması; $f(x)$ fonksiyonunun Dirichlet koşullarını sağlaması ile mümkün olup bu koşullar altında (3.17) eşitliğine $f(x)$ fonksiyonunun Fourier integrali denir (Dündar, 2000).

Tanım 3.13. Fourier integralinden;

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x} dx \quad (3.18)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{i\alpha x} d\alpha \quad (3.19)$$

tanımlamaları yapılarak yazılan (3.18) eşitliğine $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü ve (3.19) ile verilen eşitliğe ise ters Fourier dönüşümü denir (Dündar, 2000).

3.3. Periyodik Fonksiyonların Uygulamaları

Fourier analizi periyodik fonksiyonlarla ilgili matematiksel işlemler bütünüdür. Çünkü periyodiklik içeren bir takım fiziksel veya sayısal parametrelere bağlı olayların öncelikle periyodik fonksiyonlar şeklinde ifade edilmesi ve bu ifadenin çeşitli matematiksel yöntemlere uyumlu hale getirilmesi ihtiyacı Fourier analizinin oluşumuna neden olmuştur. Bu analiz sayesinde duyu organlarının algıladığı bir takım fiziksel olaylar, matematiksel formlara dönüştürülmek suretiyle aklın algılayabileceği bir yönetime kavuşturulmuştur.

Periyodik fonksiyonlar, mühendislikte salınım veya titreşim hareketi yapan sistemlerde sıklıkla kullanılır. Beklendiği gibi, trigonometrik fonksiyonlar salınım ve titreşime dayalı problemlerin modellenmesinde önemli bir rol oynar. Fourier analizi bu amaçla kullanılan trigonometrik seriler için sistematik bir çerçeve oluşturur (Chapra S. C. and Canale R. P., çev., 2004).

Bu bağlamda Fourier serileri, Dirichlet koşullarını sağlayan periyodik fonksiyonların ilgilendiği çeşitli problemlerin incelenmesinde güçlü bir araç olmaktadır. Ancak etkiyen kuvvet veya voltajın periyotsuz olduğu birçok problemde periyodik

fonksiyonlar bulunmaz. Bu tür problemlerde Fourier serilerinden yararlanamayız (Yarasa, 1976). Periyodik olmayan her fonksiyon, periyodu $[-\infty, \infty]$ olan bir periyodik fonksiyonmuş gibi düşünülebilir (Karaoğlu, 2007). Verilen bir periyodik fonksiyonun periyodu sonsuza gittiğinde, serinin yaklaştığı limit (şayet varsa) incelenerek periyodik olmayan fonksiyonların uygun bir gösterimi elde edilebilir. Bu tür problemleri çözebilmek için Fourier analiz yöntemi oluşturulmuştur (Yarasa, 1976).

Örneğin; bir elektrik sinyali hakkında bilgi (frekans, genlik ve evresini öğrenmek) alabilmek için bu sinyal Fourier serisi ile yazılır. Zaman boyutundaki bir sinyali frekans boyutuna aktarma işleminde ise Fourier dönüşümü kullanılır (Kesler ve Sunan, 2008).

İşitme, sesin frekans yüksekliğine bağlı olduğundan kulak periyotların dalga boylarına göre zihinsel olarak sesi frekans tayfına (farklı perdelerdeki ses miktarları) çevirerek frekans dönüşümünü gerçekleştirir. Beyin bu bilgiyi algılanmış sese çevirir. Benzeri işlemler, matematiksel yöntemleri kullanarak ses dalgaları veya ışık dalgaları, okyanustaki gel-git olayları ve güneş hareketi örneklerinde olduğu gibi herhangi bir değişim üzerinde gerçekleştirilebilir. Bu matematiksel yöntemleri kullanarak değişimleri gösteren fonksiyonları sinüzoidal dalgalar kümesine çevirebiliriz. Fourier dönüşümü, her frekansa ait sinüs dalgası için genlik ve evre hesaplayan bir fonksiyondur. Fourier dönüşümü elektrik, ısı ve ışıkla ilgili karışık eşitlikleri çözmekte kullanılabilir. Değişken bir işareti oluşturan sinüzoidal dalgaları göstererek, astronomi, tıp ve kimyada birçok kullanım alanı bulur. Fourier analizi birtakım anormal durumlarda uygulanamaz. Örneğin, sınırlı bir bölgede sonsuz sayıda sıçrama yapan bir fonksiyona uygulanamaz. Ancak fiziksel bir büyüklüğün ölçülmesiyle elde edilen tüm fonksiyonlar için Fourier serisi yakınsayacaktır. Fourier analizi uzaydaki veya zamandaki bir fonksiyonu frekans, genlik ve evresi değişen sinüzoidal elemanlara indirger. Fourier dönüşümü her frekanstaki genlik ve evreyi gösteren bir fonksiyondur. Dönüşüm iki matematiksel metotla hesaplanır. Birincisi fonksiyon sürekli ise ikincisi ise fonksiyon kesikliyse uygulanır. Eğer fonksiyon kesikliyse, yani fonksiyon kesikli zaman aralıklarına ait değerlerden oluşuyorsa, ayrık frekanslardaki sinüzoidal fonksiyonların serisi şeklinde gösterilebilir. Bu frekanslar asıl frekansın iki, üç ve daha büyük katlarıdır. Bu şekildeki sinüslerin toplamına Fourier serisi denir. Eğer fonksiyon

sürekliyse, yani her gerçek sayı için tanımlı bir değeri varsa bu fonksiyon tüm frekanslardaki sinüslerin Fourier integraline indirgenebilir. Fourier dönüşümü ne seri ne de integral değildir. Kesikli fonksiyonlarda, Fourier serisini oluşturan evrelerin ayrık frekanslara bağlı listesidir. Sürekli fonksiyonlarda ise Fourier integralinin alınmasından ortaya çıkan frekansa bağlı bir fonksiyondur. Deneysel ölçüm değerlerinden oluşan fonksiyonların veya Fourier integrali kolayca hesaplanamayan ve tablolarda bulunmayan fonksiyonların Fourier dönüşümü sayısal teknikler kullanılarak bulunabilir. Elektronik bilgisayarlar çıkmadan önce, sayısal hesapları kâğıt ve kalemle yapmak gerçekten zor bir işti. Bilgisayarlar ve programlar geliştikçe Fourier analizi için yeni yöntemler ortaya çıktı ve hesaplar çok kolaylaştı. 1965 de IBM Thomas J. Watson Araştırma Merkezi'nden James W. Cooley, Murray Hill'de ki Bell Telephone Laboratories'ten John W. Tukey bu tür bir program yazdılar. Onların çalışmaları "hızlı Fourier dönüşümü" diye bilinen programın ortaya çıkmasını sağlamıştır (Bracevell R. N., çev., 1991).

Fourier analiz tekniklerinin matematikten ziyade mühendislikteki uygulamaları ve kullanma yöntemleri daha önemlidir. Ayrıca klasik matematikle gösterilemeyen bazı fonksiyonların ele alınmalarını olanaklı kılar (Yarasa, 1976).

3.3.1. Diferansiyel denklemlerin çözümü

Matematik ve mühendislikteki bazı hesaplamalarda diferansiyel denklemler kullanılmaktadır. Diferansiyel denklemlere dayalı problemlerin çözüm yollarından birisi de Fourier serileri yoluyla çözüm yöntemidir. Diferansiyel denklemlerin Fourier serileri yoluyla çözümü aşağıdaki örnekler üzerinde açıklanmıştır.

Örneğin;

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 4t,$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

sınır değer problemini Fourier serisi yöntemiyle çözümü için,

$x(t) = 4t$ bir tek fonksiyon olduğundan verilen denklemin çözümü için yarım aralıklı Fourier sinüs serisi kullanılabilir. Ayrıca $x(t)$ fonksiyonunun

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t \quad (3.20)$$

şeklinde olduğu düşünülürse, bu şekildeki çözüm her zaman asimetrik olarak $-1 < t < 0$ aralığına genişletebilir. (3.20) ile ifade edilen fonksiyonun periyodiklik özelliği kullanılarak reel eksene genişletebilir. (3.20) serisi verilen sınır koşullarını sağlar. Yani, $x(0) = 0$ ve $x(1) = 0$ dır. (3.20) serisi verilen diferansiyel denklemde kullanılırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} [-(n\pi)^2 + 4] b_n \sin n\pi t = 4t$$

elde edilir. $4t$ fonksiyonu Fourier sinüs serisi şeklinde yazılırsa, $[-(n\pi)^2 + 4] b_n$ katsayısı,

$$[-(n\pi)^2 + 4] b_n = 2 \int_0^1 4t \sin n\pi t dt = 8 \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

olur. Buradan,

$$b_n = \frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi[4 - (n\pi)^2]} \quad (3.21)$$

elde edilir. Böylece b_n değeri (3.20) de yerine yazılırsa, verilen sınır değer probleminin çözümü;

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t \\ &= \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n[4 - (n\pi)^2]} \sin n\pi t \end{aligned}$$

olarak elde edilir (Bayram, 2009).

Başka bir örneği

$$y'' + 9y = f(t) \quad (3.22)$$

şeklinde ifade edersek, bu diferansiyel denkleminin genel çözümü,

$$f(t) = |t|, \quad -\pi \leq t \leq \pi, \quad f(t + 2\pi) = f(t) \quad (3.23)$$

şartları altında bulunabilir.

$f(t) = |t|$ periyodik bir fonksiyon olduğundan, Fourier serisi şeklinde bir çözüm aramak uygundur. İlk önce verilen diferansiyel denklemin tamamlayıcı fonksiyonu bulunmalıdır. Karakteristik denklem,

$$a^2 + 9 = 0$$

şeklinde yazılırsa, $a_1 = 3i$ ve $a_2 = -3i$ bulunur. Böylece tamamlayıcı çözüm,

$$y_c = A \cos(3t) + B \sin(3t) \quad (3.24)$$

olur. $f(t) = |t|$ fonksiyonu bir çift fonksiyon olduğundan Fourier serisi;

$$|t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)t]}{(2n-1)^2} \quad (3.25)$$

şeklindedir. Verilen diferansiyel denklemin özel çözümü;

$$y_p'' + 9y_p = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)t]}{(2n-1)^2} \quad (3.26)$$

diferansiyel denklemini sağlamalıdır. Şimdi (3.26) ifadesini,

$$y_p'' + 9y_p = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos(t) - \frac{4}{9\pi} \cos(3t) - \frac{4}{25\pi} \cos(5t) - \dots \quad (3.27)$$

şeklinde yazalım. Şimdi belirsiz katsayılar yöntemi kullanılarak, sağ taraftaki ifade için tahmini çözüm,

$$y_p = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) + a_2 \cos(3t) + b_2 \sin(3t) + \dots \quad (3.28)$$

$$= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos[(2n-1)t] + b_n \sin[(2n-1)t] \quad (3.29)$$

olur. y_p özel çözümünün ikinci türevi,

$$y_p'' = \sum_{n=1}^{\infty} -(2n-1)^2 \{a_n \cos[(2n-1)t] + b_n \sin[(2n-1)t]\} \quad (3.30)$$

şeklinindedir. Eğer y_p ve y_p'' türevini (3.26) ifadesinde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} -(2n-1)^2 \{a_n \cos[(2n-1)t] + b_n \sin[(2n-1)t]\} \\ & + \frac{9}{2} a_0 + 9 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos[(2n-1)t] + b_n \sin[(2n-1)t] \\ & = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)t]}{(2n-1)^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

olur. Bu ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned} & \frac{9}{2} a_0 - \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [9 - (2n-1)^2] a_n + \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \right\} \cos[(2n-1)t] \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} [9 - (2n-1)^2] b_n \sin[(2n-1)t] = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

yazılır. Bu eşitliğin sıfır olabilmesi için,

$$a_0 = \frac{\pi}{9}, \quad a_n = -\frac{1}{\pi(2n-1)^2[9 - (2n-1)^2]} \quad \text{ve} \quad b_n = 0 \quad (3.33)$$

olmalıdır. a_n katsayısı $n = 2$ hariç her n için tanımlıdır. $n = 2$ için a_2 katsayısı tanımsızdır. a_2 katsayısının çarpanı $\cos(3t)$ idi. $\cos(3t)$ terimine karşılık gelen çözüm $Y(t)$ olsun. Bu çözüm y_p çözümünde yerine yazılırsa, özel çözüm;

$$y_p = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(t) + Y(t) + a_3 \cos(5t) + \dots \quad (3.34)$$

olur. y_p özel çözümü verilen diferansiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$Y'' + 9Y = -\frac{4}{9\pi} \cos(3t) \quad (3.35)$$

elde edilir. Bu denklem için belirsiz katsayılar yöntemi kullanılarak,

$$Y(t) = -\frac{2}{27\pi} t \sin(3t) \quad (3.36)$$

bulunur. Böylece verilen denklemin genel çözümü;

$$y_c + y_p = A \cos(3t) + B \sin(3t) + \frac{\pi}{18} - \frac{2}{27} t \sin(3t) - \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 2}}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)t]}{(2n-1)^2 [9 - (2n-1)^2]} \quad (3.37)$$

olarak bulunur (Bayram, 2009).

3.3.2. Elastisite problemlerinin çözümü

Herhangi bir cisme belli bir kuvvet uygulandığında cisimde fiziksel bir değişiklik meydana gelir, bu kuvvetin kaldırılmasıyla birlikte cismin ilk durumuna dönme kabiliyetine elastisite denir. Elastisite, özellikle yapı ve malzeme mühendisliği alanlarında herhangi bir malzemenin gerilme, uzama ve taşıma kabiliyetlerinin ölçülmesi açısından önemlidir.

Elastisite probleminin çözümünde en büyük zorluk sınır şartlarının sağlatılmasıdır. Bu zorluğu gidermenin yollarından biri de sınır yüklerini Fourier serilerine açmaktır.

Fourier serilerinin her bir terimine karşılık gelen çözüm bulunur ve bu çözümler toplanarak asıl çözüm elde edilir (<http://www.akademi.itu.edu.tr>).

3.3.3. Yeraltı suyu periyodik davranışının incelenmesi

Periyodogram analizi, bir veri seti içindeki periyodik değişiklikleri analiz etmede kullanılan yöntemdir (<http://www.sozluku.com>).

Periyodogram analizi serideki dalgalanmanın sinüs ve kosinüs dalgalarından oluştuğu kabulüne dayanır. Serideki dalgalanma Fourier serisi ile açıklanır. Orijinal olarak periyodogram analizi bilinen bir frekanstaki gürültüde gömülü bulunan sinüs bileşeninin genliliğini araştırmak ve tahmin etmek için kullanılır (<http://www2.aku.edu.tr>).

Çok sayıda hidrolojik veri (yağış, debi, buharlaşma gibi), ortalama, standart sapma veya varyans gibi temel istatistiksel parametreler periyodik (mevsimsel) özellikleri yansıtırlar. Bu özellikler bir yıllık dönem içinde oluşan düzenli hareketlerdir ve her yıl gerçekleşir. Gözlem serilerindeki bu periyodik bileşenler Fourier serileri yaklaşımı kullanılarak araştırılabilir. Bu yaklaşımda q_k serinin periyodik bileşeni olarak kabul edilirse Fourier serisi fonksiyonunun katsayısı şu şekilde hesaplanabilir:

$$\bar{q} = \left(\frac{1}{w} \right) \sum_{k=1}^w q_k$$

Burada $q_k : X_{p,k}$ (p: yıl, k: ay) zaman serisinin periyodik parametresidir ve

$$\text{var}(q_k) = \left(\frac{1}{w} \right) \sum_{k=1}^w \left(q_k - \bar{q} \right)^2$$

$$a_q(j) = \left(\frac{2}{w} \right) \sum_{k=1}^w q_k \cos \left(\frac{k2\pi j}{w} \right)$$

$$b_q(j) = \left(\frac{2}{w} \right) \sum_{k=1}^w q_k \sin \left(\frac{k2\pi j}{w} \right)$$

ile hesaplanır. Burada;

$k : 1, 2, \dots, w$

$j : 1, 2, \dots, M$ (Aylık veri için, $M = \frac{w}{2}$)

w : Temel periyot (12 aylık)

\bar{q} : Ortalama

dır (Yurtçu ve İçağa, 2005).

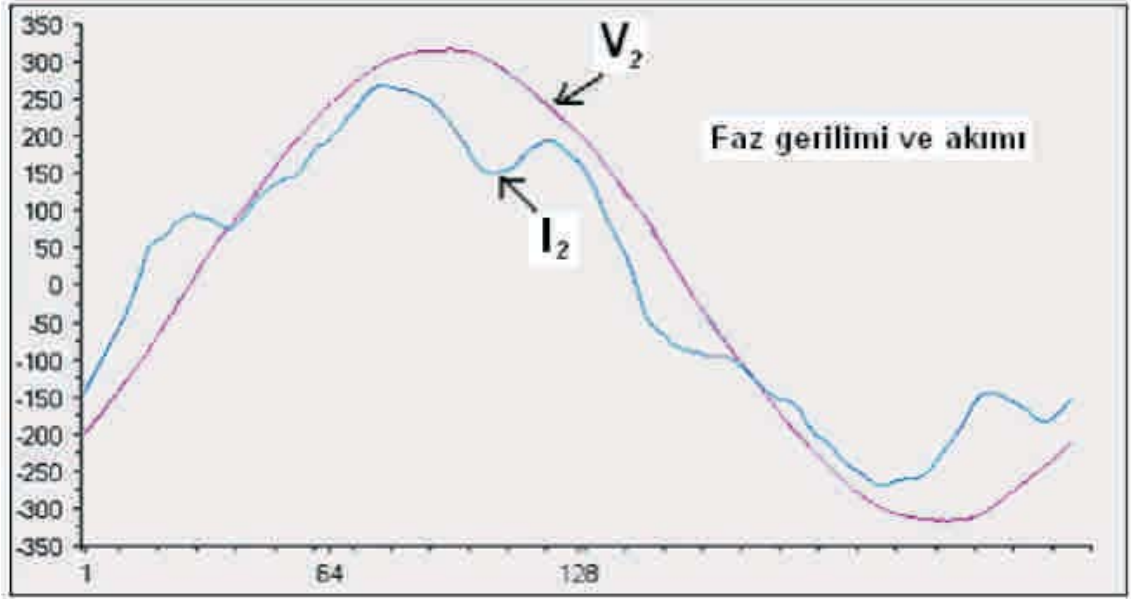
3.3.4. Harmonik analiz

Doğrusal olmayan yüklerin çektikleri akımın dalga biçimleri, periyodik olmakla birlikte, 50 Hz frekansında sinüs dalga şekli ile frekans ve genliği farklı diğer dalgaların toplamından meydana gelmektedir. Temel bileşen olarak adlandırılan dalga 50 Hz frekansında olup bunun dışındaki frekanslarda olan diğer dalgalar “harmonik” olarak adlandırılır (Akpınar, 2007).

Alternatif akım tesislerinde gerilimin ve akımın tam sinüs eğrisi şeklinde olması istenir. Enerji tesislerinde bulunan doğrusal olmayan yüklerden kaynaklanan zamana göre tam sinüsoidal olmayan ancak, periyodik değişim gösteren dalga biçimleri içinde harmonikler saklıdır (Ekiz ve Tümay, 2003).

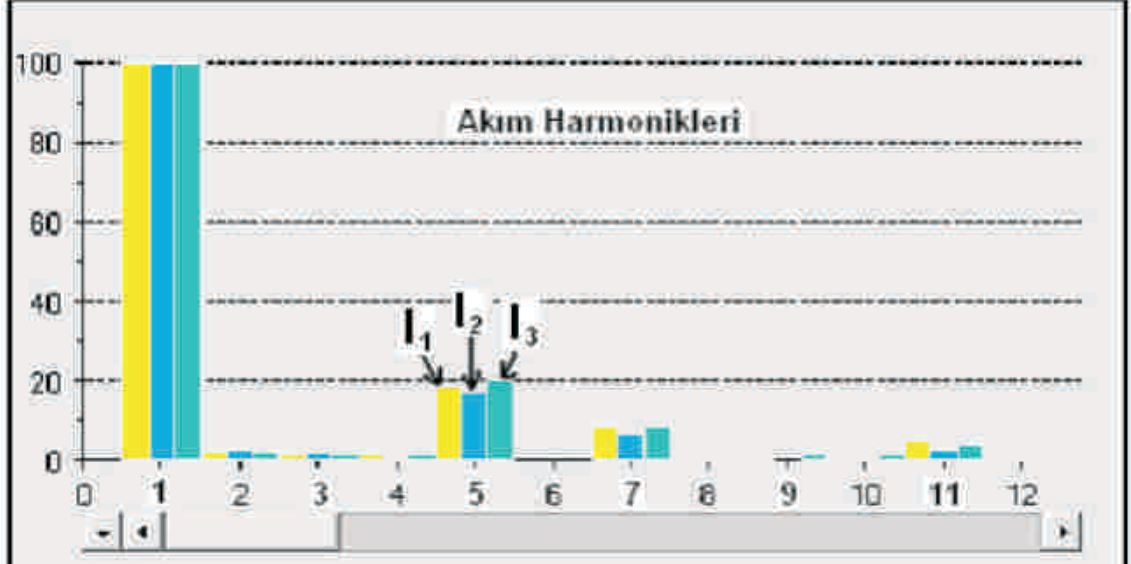
Doğrusal olmayan periyodik bir dalgayı matematiksel olarak modellemek için dalganın Fourier analizini yapmamız gerekir. Fourier analizi ile doğrusal olmayan bir dalga şeklini, 50 Hz frekansında sinüs dalga şekliyle frekans ve genliği farklı diğer dalgaların toplamı şeklinde tanımlayabiliriz (Akpınar, 2007).

Şekil 3.4. de V_2 , sinüs formunda bir gerilimin; I_2 ise sinüs formundan oldukça uzaklaşmış, doğrusal olmayan bir akımın dalga şeklini göstermektedir.



Şekil 3.4. Yük gerilimi ve akımı (Akpınar, 2007)

Şekil 3.5. ise doğrusal olmayan I_2 akım dalga şeklinin Fourier analizi sonucunda edinilen harmonik değerlerini göstermektedir.



Şekil 3.5. Akım harmonikleri (Akpınar, 2007)

Doğrusal olmayan tüm yükler harmonik üretirler. Doğrusal olmayan yüklerle harmonik kompanzasyonu (voltaj ve akım arasındaki faz kaymasını sıfıra yakın tutma işlemi) yapmak için, çalışma şartlarında yükün üretebileceği tüm harmonik genliklerinin ve frekanslarının bilinmesi gereklidir. Bu da ancak harmonik analizi ile mümkündür. Dalga şekillerinin harmonik analizi için bazı teknikler geliştirilmiştir. Şüphesiz, Fourier

serileri bunlar arasında en yaygın olan işaret işleme tekniğidir (Altıntaş, 2006). Fourier serilerinin elde edilme işlemi dalga analizi veya harmonik analizi olarak da tanımlanır (Tunçalp, Kakilli ve Sucu, 2003). Fourier serileri kısaca, zaman uzayında ifade edilmiş periyodik bir dalga şeklinin, frekans uzayına dönüşümünü sağlar. Periyodik bir işaret, çeşitli genlik ve frekanstaki birçok sinüs işaretinin toplamı şeklinde ifade edilebilir. Bu işlem Fourier serisine açılım olarak bilinmektedir. En düşük frekanslı sinüzoidal işaret 1. harmonik (temel dalga), diğerleri ise harmonik bileşenler adını almaktadır. Analiz sonunda a_0 katsayısı ve a_n , b_n seri katsayıları hesaplanarak harmonik genlikleri bulunmuş olur. a_n sabiti, fonksiyonun ortalama değerine eşittir. n indisi harmonik mertebesini göstermekte olup, a_n ve b_n , n . harmoniğin bileşenleridir. Fourier serileri sadece periyodik olan işaretlere uygulanabilmektedir. Periyodik olmayan işaretlerin de harmonik analizinin yapılabilmesi için sayısal işlemci tabanlı ayrık Fourier dönüşüm yöntemi kullanılmalıdır. Algoritması gereği, ayrık Fourier dönüşüm yöntemi de Fourier analizi gibi uzun bir zaman almaktadır. Daha sonraki yıllarda dönüşüm süresini kısaltmak için ayrık Fourier dönüşümünün hızlı bir gerçekleştirilmesi olan hızlı Fourier dönüşüm yöntemi geliştirilmiştir. Fourier serileri periyodik olan işaretin fonksiyonunu kullanırken, ayrık Fourier dönüşüm ve hızlı Fourier dönüşüm yöntemleri periyodik olan veya olmayan işaretin örneklenmiş verilerini kullanmaktadır (Altıntaş, 2006).

3.3.5. Malzeme işleme teknolojisi

Elektro erozyon ile işleme yönteminin, elektriksel olarak iletken bir iş parçasına yüksek frekanslı elektrik boşalmalarının kontrollü olarak uygulanması ve böylece iş parçasından küçük parçacıkların eritilerek ve buharlaştırılarak koparılması prensibine dayanan bir alışılmamış işleme yöntemi olduğunu belirten Coğun, Kocabaş ve Özgedik (2004) yaptıkları çalışmada; malzeme işleme parametrelerinin yüzey pürüzlülüğüne etkisini incelemişlerdir. Rank Taylor Hobson Surtronic 3+ adlı ölçüm cihazından elde ettikleri yüzey pürüzlülük bilgilerini SURT adlı bilgisayar programı yardımıyla bilgisayar ortamına aktarmışlar ve yüzey pürüzlülük grafiklerini Sigma Scan 5 adlı görüntü işleme paket programıyla sayısallaştırarak, elde ettikleri pürüzlülük verilerini Fortran dilinde geliştirilen bir bilgisayar programı sayesinde Fourier serileri ile modellemişlerdir.

Herhangi bir sürekli $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) \quad (3)$$

şeklinde yazılabileceğinden yüzey profili $f(x)$ fonksiyonu olarak kabul edilirse,

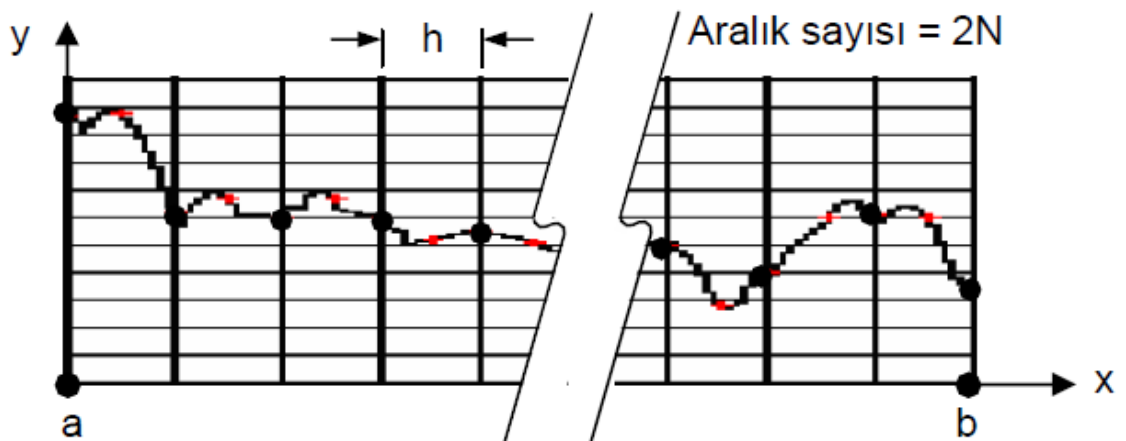
$$\theta = \frac{2(x-a)}{b-a} = \frac{(x-a)\pi}{hN} \quad (4)$$

gibi bir θ değişkeni tanımlanıp $f(x)$ fonksiyonu yaklaşık olarak,

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) \quad (5)$$

$$A_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{(2N-1)} f(x_i) \quad (6)$$

şeklinde yazılabilir. Burada incelenen yüzey profilinin başlangıcının x değeri a , bitişinin x değeri b , iki ardışık x değeri arasındaki uzaklık h ve çift sayıdaki aralık sayısı $2N$ dir (Şekil 3.6.).



Şekil 3.6. Sayısallaştırılmış bir yüzey profili (Çoğun vd 2004)

Yüzey profili sayısallaştırılırken yatay ekseninde 160 eşit aralıklı noktadaki ($2N = 160$) koordinat değerleri bulunmuştur. A_k ve B_k değerleri ise;

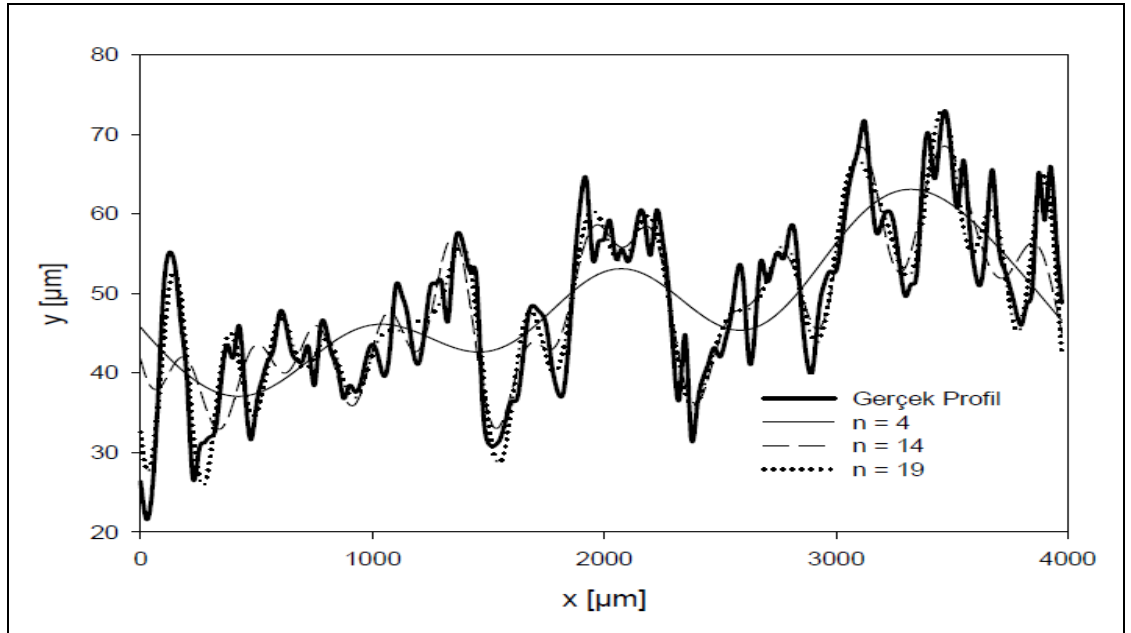
$$A_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{(2N-1)} f(\theta_i) \cos k\theta_i \quad k = 0,1,2,\dots,m \quad (7)$$

$$B_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{(2N-1)} f(\theta_i) \sin k\theta_i \quad k = 1,2,\dots,m \quad (8)$$

$$\theta_i = i \left(\frac{\pi}{N} \right) \quad i = 1,2,3,\dots,2N-1 \quad (9)$$

eşitliklerinden hesaplanır. Sayısallaştırma ile elde edilen gerçek değerlerle Fourier serilerinden hesaplanan yaklaşık değerlerin birbirine uyumunu belirlemek amacıyla uyum testi yapılmıştır. Yüzey pürüzlülüğü grafiklerini en iyi şekilde ifade eden en az terimli Fourier serisinin terim sayısının tespiti için Fortran dilindeki bilgisayar programı ile 1 den 79 a kadar terim sayısı artırılarak A_0 , A_k ve B_k katsayıları hesaplanmıştır. Her terim sayısındaki sapma bir önceki ile karşılaştırılarak sapma yüzdeleri hesaplanmıştır.

Yüzey profilinin matematiksel olarak modellenmesi amacıyla yapılan incelemeler neticesinde Şekil 3.7. de farklı terim sayılı Fourier serilerinden elde edilen profiller gerçek profile karşılaştırılmış ve bulunan sonuç görsel olarak da doğrulanmıştır.



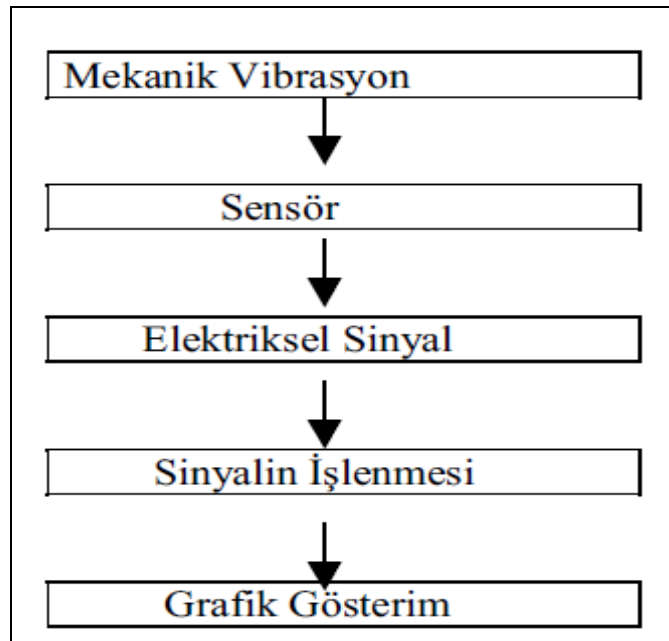
Şekil 3.7. Değişik Fourier katsayılarıyla elde edilen profillerin gerçek profile karşılaştırılması (Çoğun vd 2004)

Çoğun vd (2004) yukarıda özetlenen çalışmalar sonucunda yüzey profilinin 20 terimli Fourier serisiyle temsil edilebileceğini ileri sürmüşlerdir.

3.3.6. Makine arızalarının tespiti

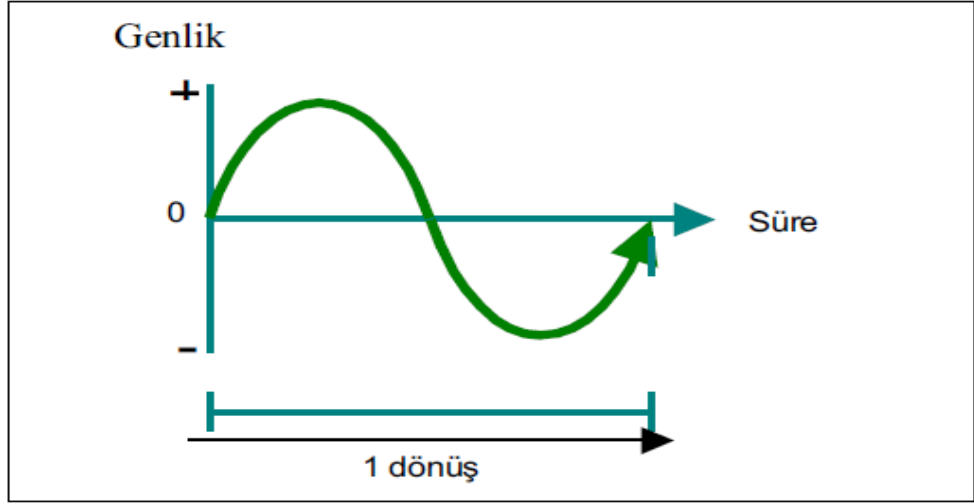
Döner makinelerin sağlığı ile ilgili en ayrıntılı bilgi, yataklar üzerinden alınan titreşim ölçümlerinin analizi ile edinilir. Makine arızaları fiziksel özelliklerine göre farklı frekanslarda kendini göstermektedir. Titreşim analizi titreşimin; rulman arızasından, kaplin ayarsızlığından, dişli sorunundan ya da balanssızlıktan mı kaynaklandığının ayırt edilmesini sağlar.

Makinenin dizaynından, imalatından, montajından gelen olası kronik sorunlar arıza kaynağının belirlenmesini zorlaştırır. Bu nedenle endüstride analizler; bir kerede ölçüm yerine belirli aralıklarda alınan grafiklerin karşılaştırılması şeklinde uygulanır. Grafiklerdeki arıza frekanslarının oluşturduğu değişim, karakteristik işaretlerle karşılaştırılır. Karşılaştırma işlemi; trend, hızlı Fourier dönüşümü, spektrum ve dalga formu grafikleri kullanılarak yapılır. Bu karşılaştırma sonucu arızanın nedeni tespit edilir. Bu işlemleri yapabilmek için titreşimleri elektriksel sinyale çeviren bir sensör ve bu sinyali algılayarak işleme özelliğine sahip hızlı Fourier dönüşümü yapabilen bir cihaz gereklidir. Bu işlemin aşamaları Şekil 3.8. de şematik olarak gösterilmiştir.



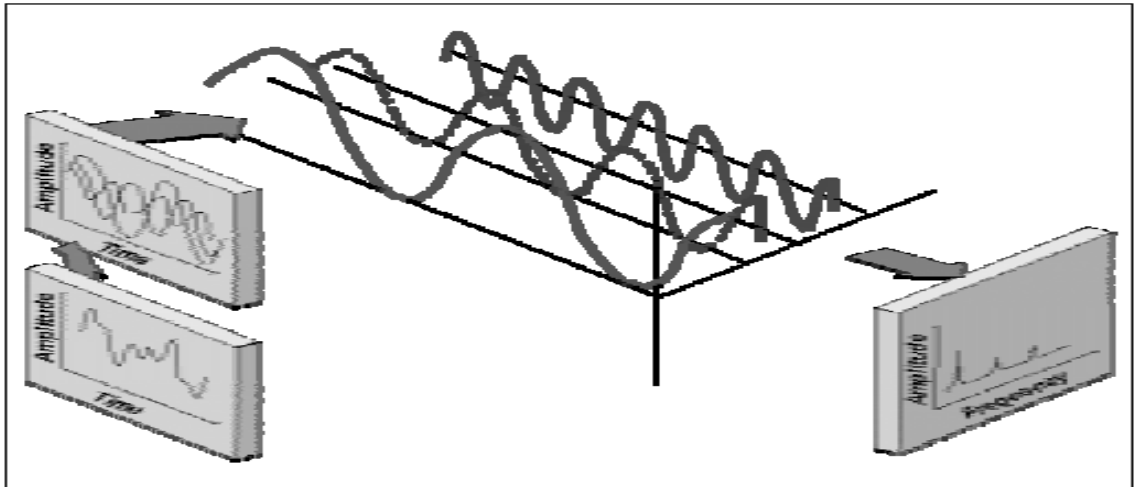
Şekil 3.8. Sinyal çevirim akışı (Köse, 2004)

Makine arızaları periyodik işaretleri oluşturur. Bu periyodik sinyaller kendi içinde harmoniklerine ayrılarak detaylandırılır. Harmonik sinyal bir sinüs eğrisi şeklinde ifade edilebilir. Bu eğriden edinilen bilgi hareketin periyodunu ve genliğini verir. Harmonik sinyali oluşturan sinüs eğrisinin dikey eksenini sinyalin genliğini, yatay eksenini ise zamanı ifade eder (Şekil 3.9.).



Şekil 3.9. Periyodu bir dönüş olan hareket (Köse, 2004)

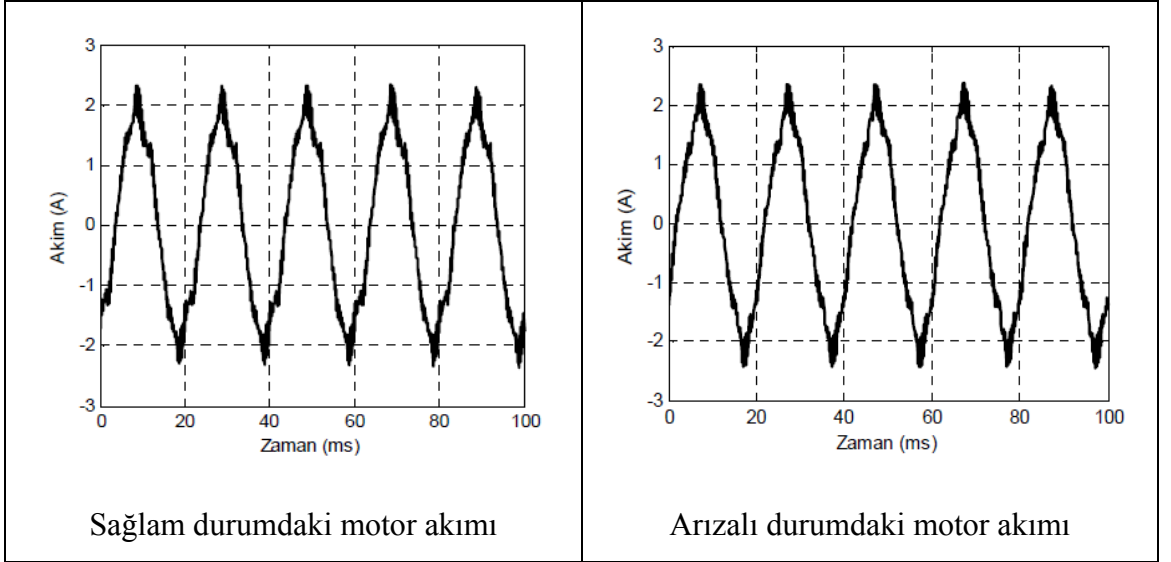
Fourier Serisi; periyodik bir sinyali meydana getiren, basit harmonik sinyallerin oluşturduğu seridir. Periyodik fonksiyonu oluşturan harmonik fonksiyonların ayırım yöntemine hızlı Fourier dönüşümü denir. Bu dönüşüm sonucu belirlenen harmonik sinyallerin frekans ekseninde dizildiği grafiğe hızlı fourier dönüşümü spektrum grafiği denir (Şekil 3.10.).



Şekil 3.10. Karmaşık dalga formunun hızlı Fourier dönüşümüyle harmoniklerine ayrılarak çıkan bilginin frekans ekseninde dizilişinin üç boyutlu görüntüsü (Köse, 2004)

Köse (2004) yukarıda değinilen matematiksel kuramlar ve teknik bilgilerle desteklediği çalışmada; üniversitelerin çok teorik yaklaşımları bir yana bırakarak, endüstrinin ihtiyacını karşılayacak düzeyde popüler titreşim analizi bilgisinin yayılmasıyla ülkemizin sınırlı kaynaklarının israf edilmeden değerlendirilebileceği fikrini belirtmiştir.

Akar ve Çankaya (2009) tarafından sincap kafesli asenkron motorun rotor çubuğu arızası deneysel olarak incelenmiştir. Sağlam ve arızalı durumdaki motor akımlarından elde edilen akım sinyallerine hızlı Fourier dönüşüm uygulayarak aşağıdaki akım zaman grafiklerini elde etmişler ve bu grafikleri mühendislik bilgisinin gerekli kıldığı diğer argümanları da kullanmak suretiyle değerlendirmişlerdir.



Şekil 3.11. Sağlam ve arızalı durumdaki motor akımları (Akar ve Çankaya, 2009)

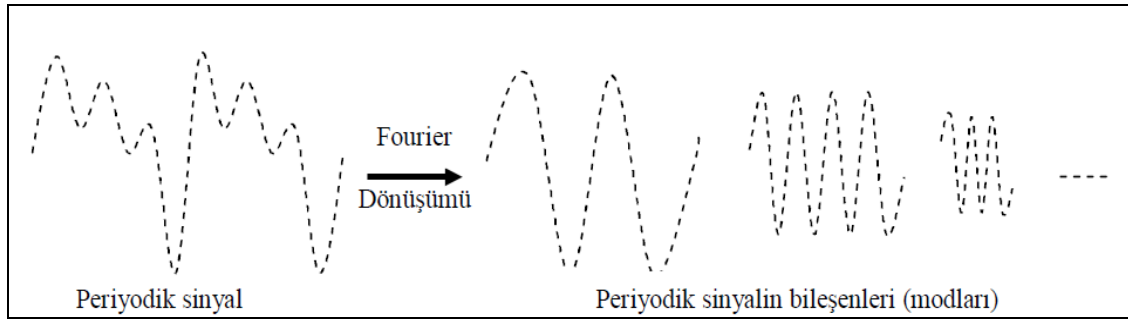
Yukarıda yer alan çalışma periyodik fonksiyonların, Fourier analizi yoluyla makine arızalarının tespitinde kullanılan bir yöntem olduğunu ortaya koymaktadır.

3.3.7. İnşaat mühendisliğinde salınım ve titreşimlerin hesaplanması

Yapı izleme sistemlerinin pratikte kullanılmasındaki en önemli adım, toplanan verilerin doğru olarak analiz edilmesidir. Bir yapının modal karakteristikleri (periyotlar, mod şekilleri, sönüm oranları), yapıdaki burulma ve salınım titreşimlerinin genlik ve periyotları ve yapıda yapı-zemin etkileşiminin olup olmadığı, varsa mertebesi Fourier analiziyle kolaylıkla belirlenebilir. Genliğin maksimum olduğu frekanslar yapının

modal frekanslarını gösterir. Yapının modal frekanslarını bulmanın en basit yolu, düzenlenmiş verilerin Fourier dönüşümünü almaktır. Fourier dönüşümü esas olarak verilerin sonlu sayıda sinüs eğrisinin genliklerini değiştirerek ve birbirine göre kaydırarak toplanmasına eşdeğer hale getirme işlemidir (Şafak, 2007).

Aşağıdaki şekilde periyodik bir sinyalin frekans dönüşümü ile elde edilen sinüs bileşenleri gösterilmiştir.



Şekil 3.12. Periyodik bir sinyalin Fourier dönüşümü (Erdoğan, Güral, Akpınar ve Ata, 2009)

Sayısal sinyal işlemenin pratik uygulamalarının çoğunda, bilgisayar sonsuz $x(n)$ dizisinin elemanlarının saklanması ve sürekli w frekansının değerlendirilmesi olanaksızdır. Ayrıca teorik olarak tanımlanan bazı serilerin aksine gerçek serilerin Fourier dönüşümleri hesaplanamamaktadır. Bu nedenle sayısal sinyaller için Fourier dönüşümünün kullanılması uygun olmamaktadır. N uzunluğunda, sonlu bir $x(t)$ ayrık sinyal için ayrık Fourier dönüşümü,

$$\begin{cases} X_S(f) = \sum_{t=0}^{N-1} x(t) e^{-jf \frac{2\pi}{N} t} \\ x(t) = \frac{1}{N} \sum_{f=0}^{N-1} X_S(f) e^{jf \frac{2\pi}{N} t} \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlanmaktadır. Ayrık Fourier dönüşümü, doğasındaki periyodiklik nedeniyle bir sinyalin N noktalı ayrık Fourier dönüşümü alındığında işaretin N periyodu ile periyodikmiş gibi işlem görmektedir. Bu nedenle ayrık Fourier dönüşümü hesabının, en az sinyalin örnek sayısı kadar ayrık frekans değerinde gerçekleştirilmesi gerekmektedir. Ayrık Fourier dönüşümü sinyalin örnek sayısından daha az sayıda ayrık frekans değerinde hesaplandığında, sinyalin frekans spektrumunun seyrek örneklenmesi

nedeniyle zamanda örtüşme meydana gelmektedir. Bu durumda zaman örtüşmesinden dolayı işaret değerleri Ters ayrık Fourier dönüşümü ile geri oluşturulamamaktadır. Ayrık Fourier dönüşümü hesabındaki N değeri sinyalin örnek sayısından fazla olabilir. Bu durumda işaretin sonuna sıfır değerlerinin eklenmesi ile sinyalin uzunluğu N ye çıkarılabilmektedir. Ayrık Fourier dönüşümü hesaplamasında etkin ve günümüzde kullanılan yaklaşım, hızlı Fourier dönüşümü algoritmalarıdır. Hızlı Fourier dönüşümü algoritması; Ayrık Fourier dönüşümünden farklı değildir. Ayrık Fourier dönüşümünün hesaplanması için etkili ve mükemmel bir algoritmadır. Ayrık Fourier dönüşümünün sayısal sinyal işleme alanında, spektrum analizi ve korelasyon gibi işlemlerin yapılmasında önemli rol oynamasının nedeni hızlı Fourier dönüşümü algoritmalarından kaynaklanmaktadır. Bir sinyalin frekans spektrumunun hesapsal yöntemlerle elde edilmesi için 2π ile periyodik olan ayrık zamanlı frekansın bir periyodunun dikkate alınması yeterli olmaktadır. Ayrık zamanlı frekans spektrumunun 2π lik temel periyodunda N adet eşit aralıklı frekans değeri

$$w = \frac{2\pi}{N} k, \quad k = 0,1,2,\dots,N-1$$

şeklindedir. Burada k tamsayısı 2π lik temel frekans bandındaki ayrık frekans değerlerini belirtmektedir ve frekans endeksi olarak adlandırılmaktadır. Fourier dönüşümü N adet ayrık frekans değeri için hesaplandığından, $k = 0,1,2,\dots,N-1$, toplam N adet karmaşık Fourier dönüşüm değeri $X_S(f)$ elde edilmektedir. Bir sinyalin frekans spektrumu için sinyalin genlik, faz ve güç spektrumları hızlı Fourier dönüşümü sonucu elde edilen karmaşık sayılardan kolayca belirlenebilmektedir (Erdoğan, Gülal, Akpınar ve Ata, 2009).

Görmüş, Mekik ve Kutoğlu (2006) tarafından yapılan çalışmada köprü salınımlarının modellenmesinde hızlı Fourier dönüşüm tekniği kullanılmıştır.

Verilerin ya da sinyallerin zaman uzayında art arda sıralanmasına zaman serisi denilmektedir. Zaman serileri tek boyutlu sinyallerdir. Bir zaman serisinin frekans uzayında örneklenmesi için Fourier dönüşümü uygulanabilir. Fourier dönüşümü yapmanın amacı sürekli zamanlı bir işaretin frekans alanında örneklenmesi sonucu

zaman alanında periyodik olan dalga formu bulmaktır. Yine bu dönüşümle zaman ve frekans arasında geçiş yapılarak titreşimin frekansı belirlenir.

Çalışmada zaman serisi olarak bir saniye kayıt aralığında ölçülen köprü yüksekliklerinin zamana bağlı değişimi kullanılmıştır. Bir zaman fonksiyonunun frekans uzayına dönüşümü, o fonksiyonun periyodik özellikleri hakkında bilgi vermektedir. Zaman uzayında görülemeyen veya seçilemeyen periyodiklikler ya da bunların periyodunun sayısal olarak hesaplanması Fourier dönüşümü sayesinde olabilmektedir. Dönüşümün amacı ve yaptığı işlem birbiri ile dönüşüm altında ilişkili olan iki farklı uzay arasındaki geçiştir.

Zaman uzayında $-\infty < t < \infty$ aralığında tanımlı bir t zamanına bağlı, tanımlı bir $x(t)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyon, periyodik fonksiyonlarla;

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) [a_f \cos(2\pi ft) + b_f \sin(2\pi ft)] dt \quad (1)$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu eşitlikte $y(t)$, $x(t)$ fonksiyonunun Fourier serisini göstermektedir. Eşitlikte geçen f frekans, a_f ve b_f ise Fourier katsayılarıdır. Karmaşık sayıların kullanılması ile

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (2)$$

eşitliği elde edilir.

Burada $X(f)$, $x(t)$ zaman serisinin Fourier spektrumu olarak bilinir. Aynı şekilde frekans uzayındaki $X(f)$ kullanılarak

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df \quad (3)$$

fonksiyonu elde edilir. Bu eşitlikte, zaman uzayındaki $x(t)$ yi elde etmek mümkün olup bu işleme ters Fourier dönüşümü denir. Bir seriye ait zaman ve frekans uzaylarındaki

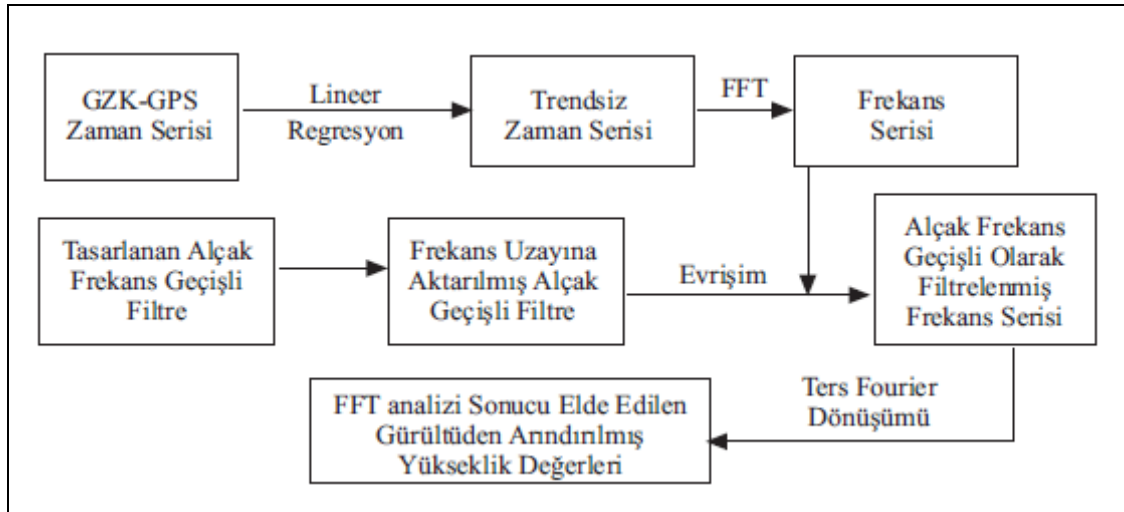
gösterim arasındaki geçiş (2) ve (3) eşitlikleri ile mümkündür. Bu özellik sinyal analizinde sıklıkla kullanılan filtreleme ve korelasyon gibi kavramlar için çok önemlidir.

x değişkeni ve L periyodu göstermek üzere, Fourier dönüşümü toplam fonksiyonu şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \quad (4)$$

Bir zaman serisi Fourier dönüşümüne tabi tutulduğunda elde edilen spektrumda küçükten büyüğe doğru sinyale katkı veren frekanslar sıralanır. Jeodezik anlamda düşünüldüğünde sinyallerdeki periyodik etkiler, sinyalin türüne bağlı olmak üzere genelde yüksek frekanslardır. Bunun nedeni, jeodezik çalışmalarda kaba hatalar ve sistematik hatalar dışında hep rastlantısal verilerle çalışılmasıdır. Rastlantısal özelliğe sahip ve gürültü olarak isimlendirilen sinyaller yüksek frekanslıdır, yani çok tekrarlanır.

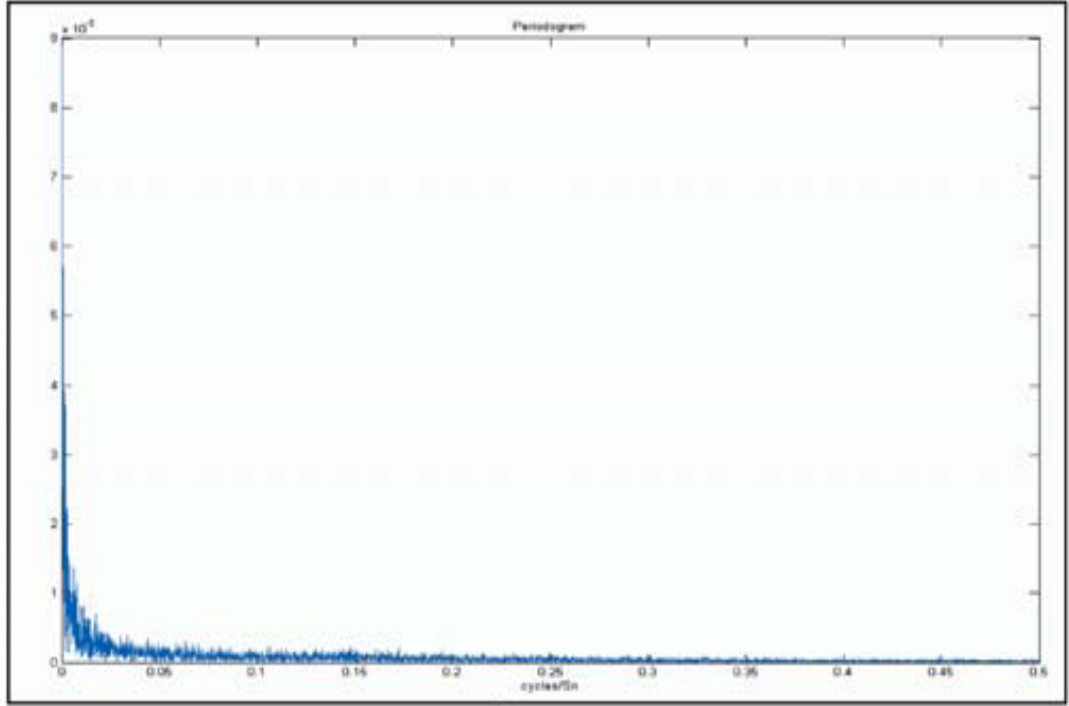
Ölçülen yükseklik değerlerinin oluşturduğu zaman serisine uygulanan hızlı Fourier analizinin akış diyagramı Şekil 3.13. de gösterilmiştir.



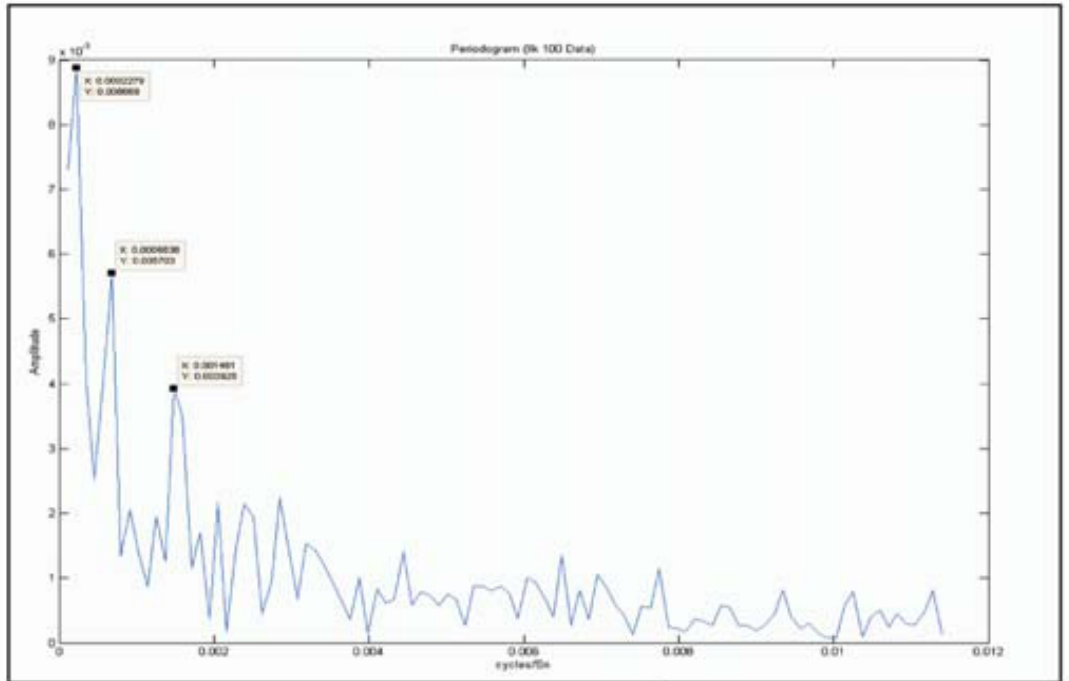
Şekil 3.13. Fourier analizi akış şeması (Görmüş vd 2006)

Fourier analizinde Matlab programı kullanılmıştır.

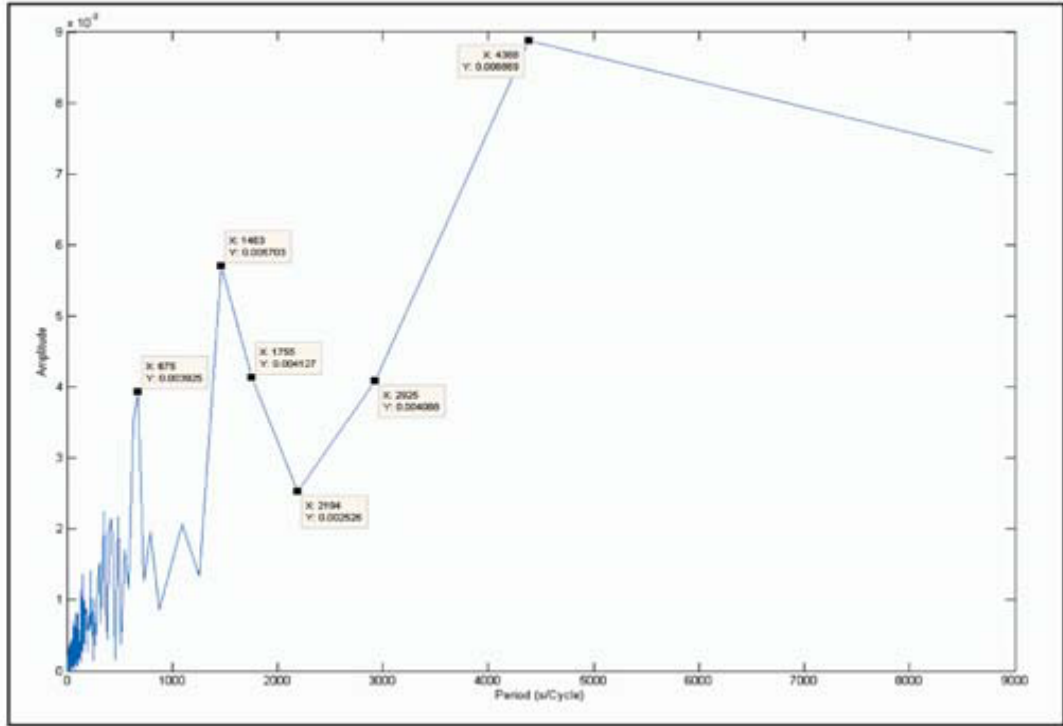
Görmüş vd (2006) yukarıda yer alan açıklamalarla temellendirdikleri çalışmalar sonucunda aşağıda örnekleri verilen Fourier analizine dayalı grafikleri elde etmişlerdir.



Şekil 3.14. Hızlı Fourier dönüşüm spektrumu (Görmüş vd 2006)



Şekil 3.15. İlk yüz veri için hızlı Fourier dönüşüm spektrumu (Görmüş vd 2006)



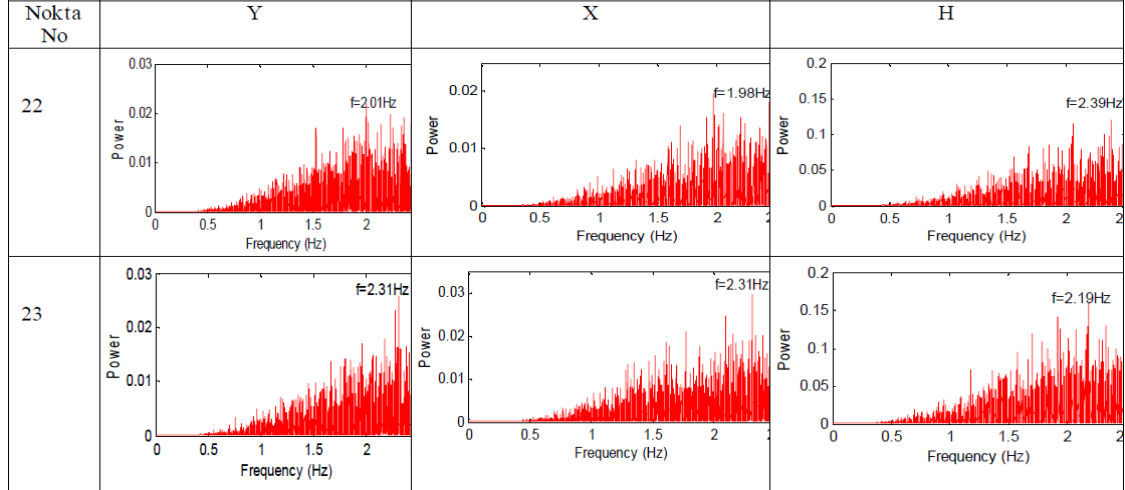
Şekil 3.16. Genlik spektrumu (Görmüş vd 2006)

Asma köprüler; farklı büyüklükteki sıcaklık değişimleri, trafik yükü, yaya yükü ve rüzgâr kuvveti gibi büyüklüklerin etkisi altında kalırlar. Asma köprülerin anlık ya da yüksek frekanslı bu tür yüklere olan tepkilerinin şekil ve fonksiyonlarının belirlenebilmesi için uygun örnekleme frekansına ve doğruluğa sahip ölçüm donanımları ile ölçülmesi gerekmektedir. Bu tepkileri belirlemek amacıyla; Erdoğan vd (2009) İstanbul Boğaziçi Köprüsü'nün aşağıda gösterilen referans noktaları üzerinden aldıkları verilerle bir çalışma gerçekleştirmişlerdir.



Şekil 3.17. Boğaziçi Köprüsü referans noktaları (Erdoğan vd 2009)

Boğaziçi Köprüsü'ne etkiyen yüklerde oluşan rastgele ve ani değişimler sonucu oluşan hareketleri temsil eden zaman serilerine hızlı Fourier dönüşümleri uygulanmak suretiyle aşağıdaki güç spektrumlarını elde etmişlerdir.



Şekil 3.18. Boğaziçi Köprüsü'nün güç spektrumları (Erdoğan vd 2009)

Erdoğan vd (2009) çalışmalarında hızlı Fourier dönüşümü sonucu frekans ve genlik değerlerini hesaplamış ve bu değerlerin köprünün üç boyutlu sonlu eleman modelinden hesaplanan modal titreşim frekansları ile uyumlu olup olmadıklarını mühendislik yorumlarıyla değerlendirmişlerdir.

3.3.8. Müzik aletleri ses perdelerinin matematiksel ifadesi

Birtakım duygu ve düşünceleri belli kurallar çerçevesinde uyumlu seslerle anlatma sanatı müzik olarak tanımlanmaktadır (www.tdk.gov.tr).

Günümüzden yaklaşık 26 yüzyıl önce Pisagor okulunda, aşağıda yer alan Şekil 3.19. da görüleceği üzere, müzik matematiğin bir alt dalı olarak kabul edilmiştir (Bora, 2002).

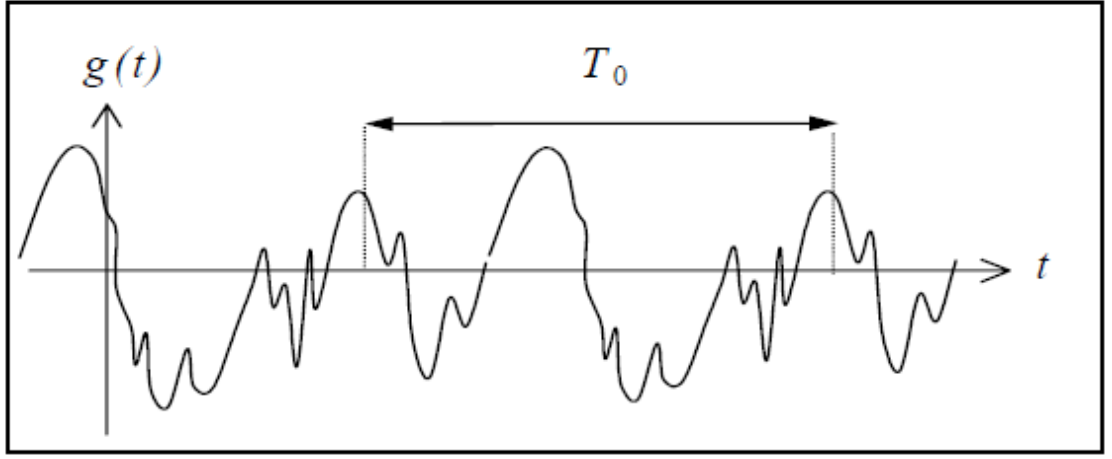
Q U A D R I V I U M

Matematik (‘değişmez’in bilimi)			
Aritmetik (mutlak)	Müzik (göreceli)	Geometri (sabit)	Astronomi (hareketli)

Şekil 3.19. Quadrivium ve bileşenleri (Bora, 2002)

Müziksel sesleri gürültü seslerinden ayıran temel özellik, müziksel seslerin ayırt edilebilir bir perde verebilme özelliğinin olmasıdır. Perde, sesin tizlik derecesine ilişkin bilgiyi taşıyan parametredir. Bir sese ilişkin bir perdenin algılanabilmesinin ölçütü ise, o sesin periyodik olma derecesidir. Dolayısıyla müziksel bir ses, zamana bağlı bir periyodik fonksiyon olarak düşünülebilir (Bora, 2002):

$$g(t \pm mT_0) = g(t) \quad \begin{cases} m \in Z \\ -\infty < t < \infty \end{cases}$$

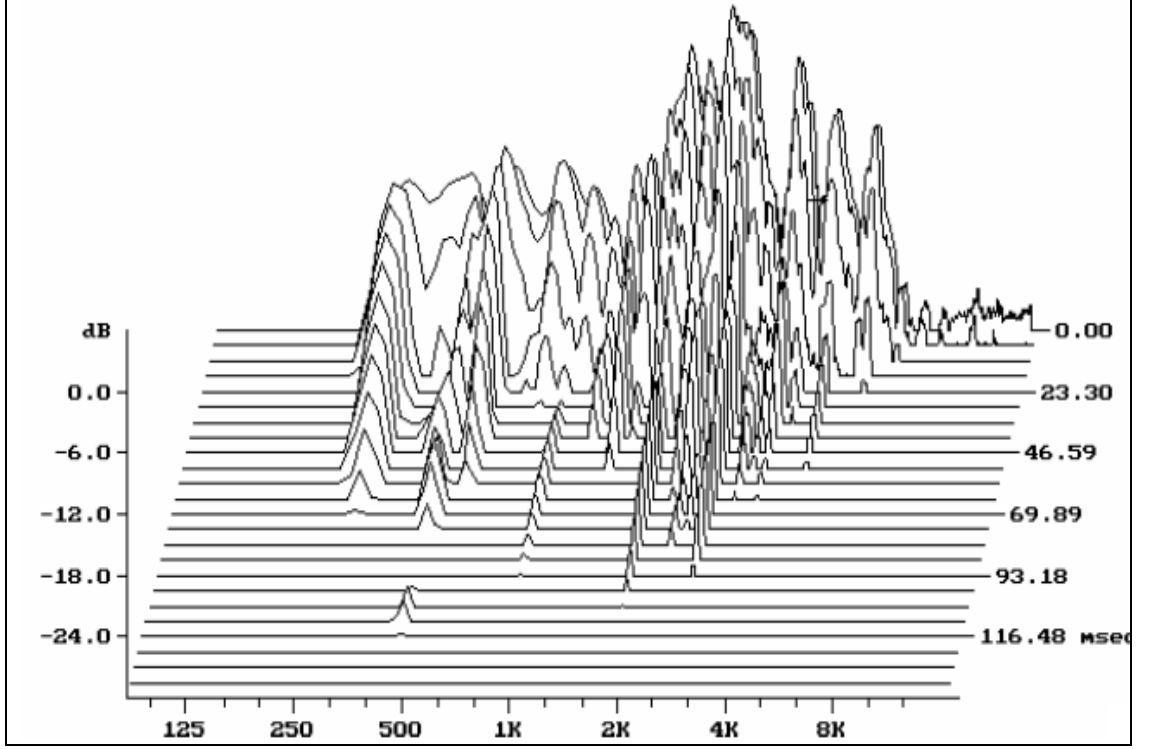


Şekil 3.20. Periyodik bir $g(t)$ fonksiyonu (Bora, 2002)

Şekil 3.20.'de T_0 periyoduyla periyodik olan bir ses yer alıyor, dikey eksen de şiddetini gösteriyor. Müziksel seslerin belirleyici özellikleri arasında 'perde', 'şiddet' ve 'süre'nin yanı sıra bir de 'tını', yani, örneğin keman, flüt ve piyano seslerini birbirinden ayırmamızı sağlayan özellik bulunmaktadır. Tını farkı, titreşen sistemlerin boyut, biçim, malzeme bakımından farkları nedeniyle gerek harmoniklerin, gerekse harmonik olmayan spektral bileşenlerin zaman içinde izledikleri ayrı genlik değişimlerinin farklı titreşim kaynakları için farklı olmasıdır. Tını farklarını inceleyebilmek için sesin frekans spektrumunun zaman içindeki değişiminin bilinmesi gerektiğinden, zaman-frekans gösterimi elde edilmelidir. Bunun için "kısa süreli Fourier dönüşümü" ile bir sesin zaman-frekans gösterimi elde edilebilir:

$$STFT_x^{(\gamma)}(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \gamma^*(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt$$

Burada $x(t)$ incelenen “ses sinyalini”, $\gamma(t)$ pencereleme fonksiyonunu, τ pencere merkezinin zaman eksenindeki konumunu simgeliyor. Şekil 3.21. bir keman sesinin zaman–frekans grafiğini gösteriyor (Bora, 2002).



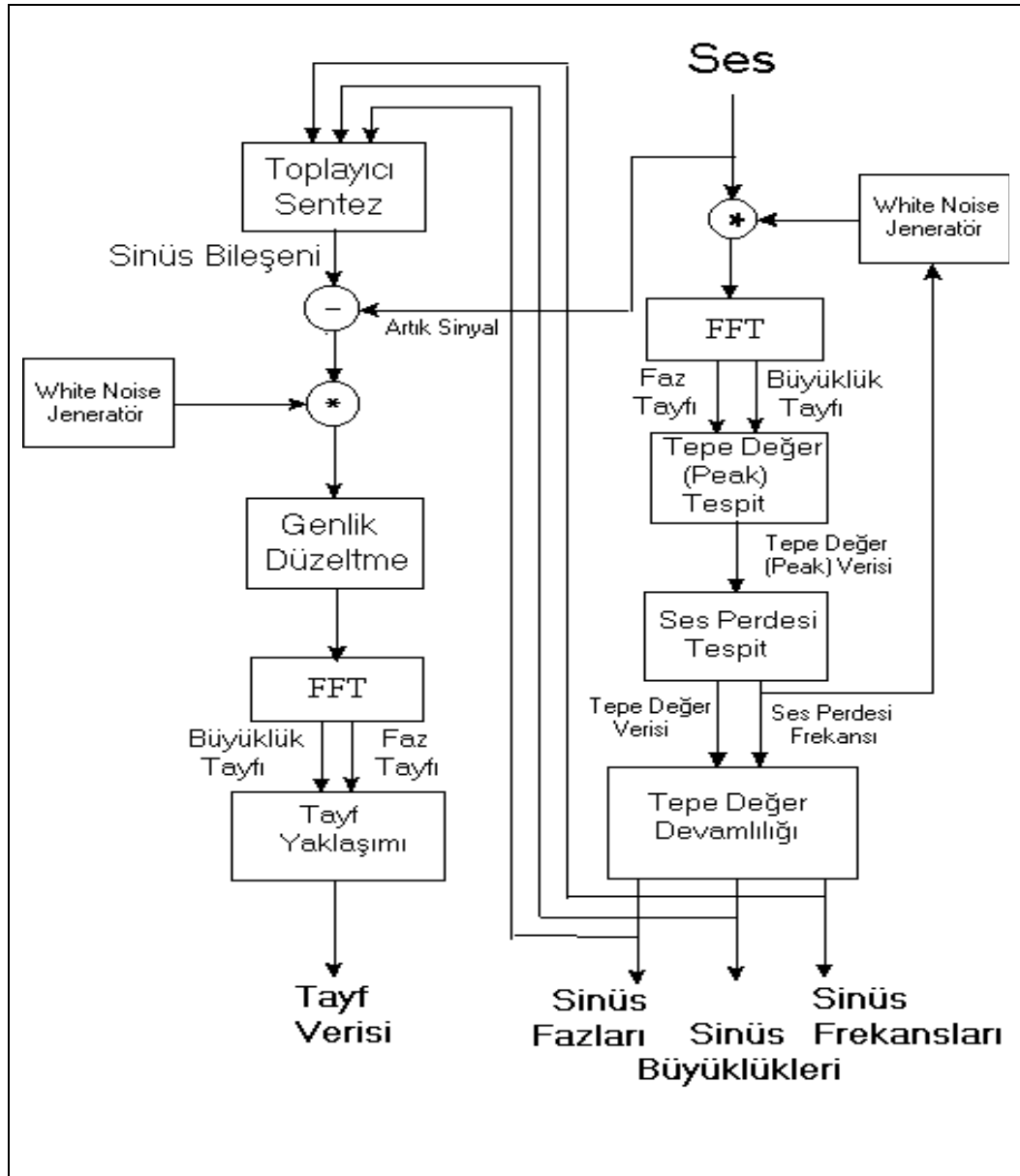
Şekil 3.21. Bir keman sesinin zaman-frekans grafiği (Bora, 2002)

Müzikal seslerin niteliğinin incelenmesi 19. yüzyılda matematikçi Joseph Fourier'in çalışmalarıyla kuvvetlenmiştir. O, müzikal seslerin matematiksel ifadelerle tanımlanabileceğini, bununda basit periyodik sinüs fonksiyonlarıyla olabileceğini ortaya koymuştur. Her sesin, onu başka müzikal seslerden ayırt eden üç özelliği vardır: Perdesi, yüksekliği ve tınısı. Fourier'in buluşu, sesin bu üç özelliğinin grafikte gösterilmesini sağlamıştır. Ses dalgası, eğrinin frekansıyla; sesin yüksekliği, eğrinin genliğiyle ve sesin tınısı periyodik fonksiyonun biçimi ile ilişkilidir. Müziğin matematiğinin kavranmasıyla, beste ve müzik aletlerinin yapımında bilgisayarlardan yararlanmak olanaklı olmuştur. Periyodik fonksiyonlar gibi matematiksel buluşlar, modern müzik aletlerinin ve sesli bilgisayarların tasarımlarında çok önemli bir rol oynamıştır. Birçok müzik aleti yapımcısı, yaptığı aletlerin periyodik ses grafiğini, bu aletler için ideal olan grafiklerle karşılaştırır. Elektronik müzik kayıtları da periyodik grafiklerle yakından ilişkilidir (Pappas T., çev., 2003).

3.3.9. Böcek seslerinin analizi ve zirai mücadele

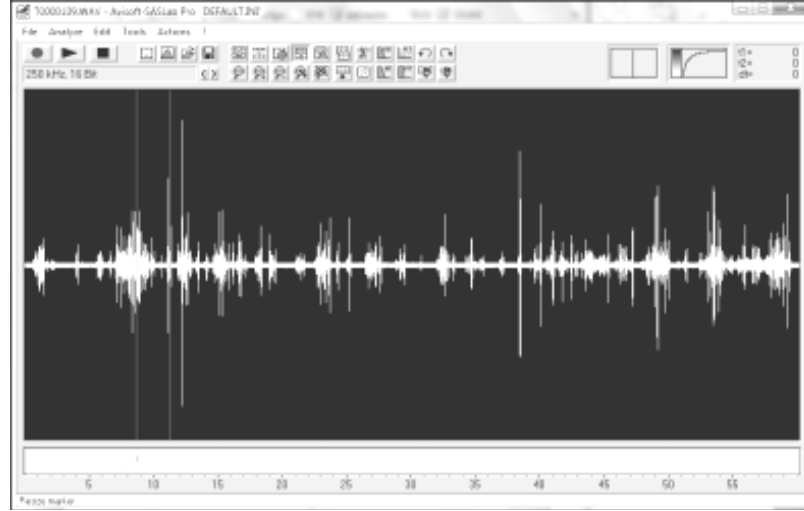
Çetinkaya (2010) tarafından yapılan “Bazı Böcek Türlerinin Ses Analizleri ve Zirai Mücadelede Kullanılabilirliğinin Araştırılması” isimli yüksek lisans tez çalışmasında; belirli böceklerin ses kayıtları çeşitli bilgisayar programları yardımıyla Fourier analizine tabi tutulmuş ve böceklerin fizyolojilerini belirlemeye yarayan bu ses analizlerinin zirai mücadelede kullanılabilirliği araştırılmıştır.

Belli bir sesin Fourier analizinin, analiz programlarında ki çalışma şeması aşağıda gösterilmiştir.



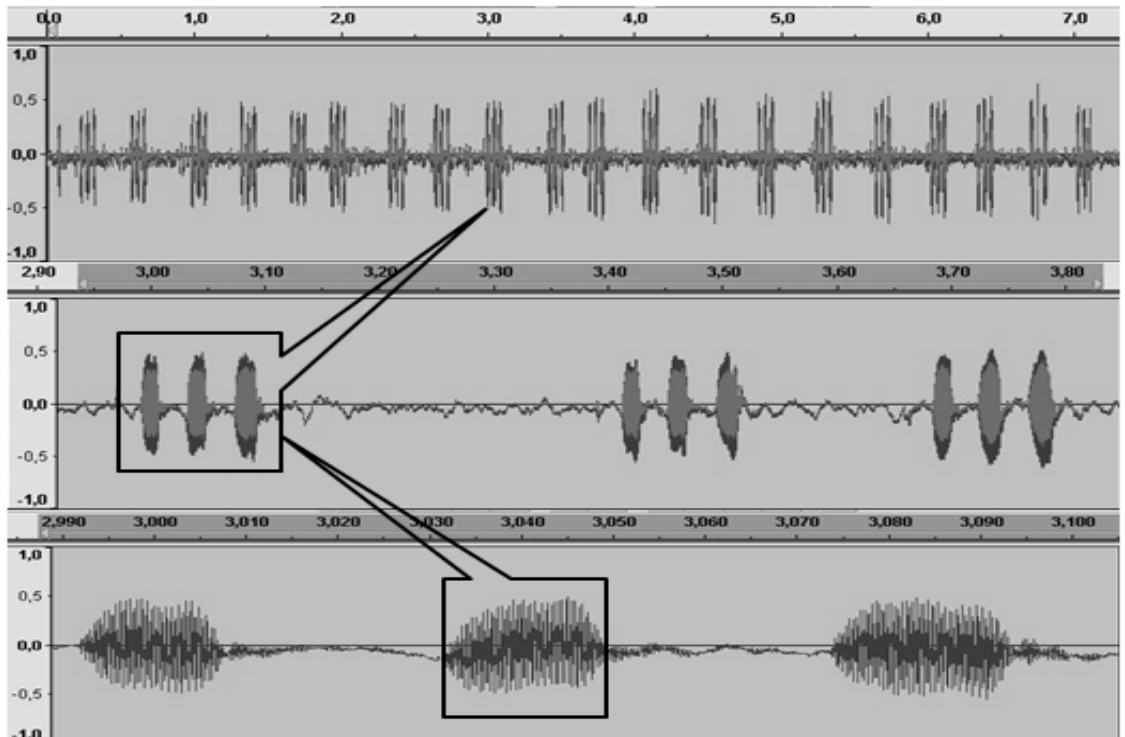
Şekil 3.22. Fourier analiz programı çalışma şeması (Çetinkaya, 2010)

Çetinkaya (2010) çalışmasında aşağıda yer alan Avisoft-SASLab Pro and Recorder USGH programından faydalandığını ve bu programla Fourier analizinin yapılabildiğini belirtmiştir.

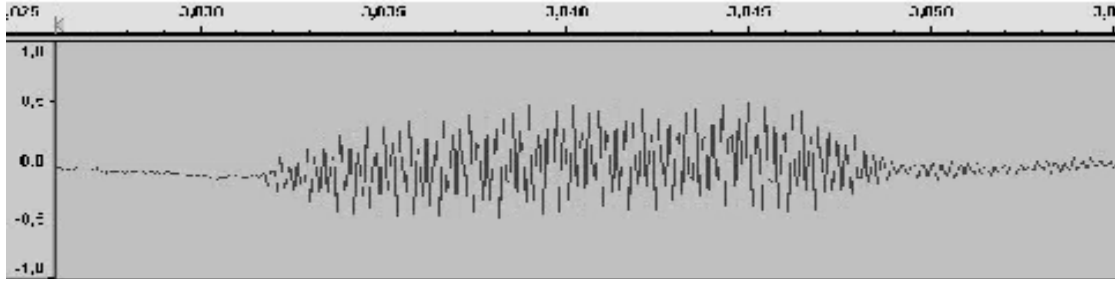


Şekil 3.23. Avisoft-SASLab Pro programı (Çetinkaya, 2010)

Aşağıdaki 3.24., 3.25. ve 3.26. numaralı şekillerde cırcır böceğinin kur yapma döneminde üç atımdan oluştuğu belirtilen her cıvıltısından birini içeren ses kaydının genlik-zaman grafiği ve Fourier analiz diyagramı verilmiştir.

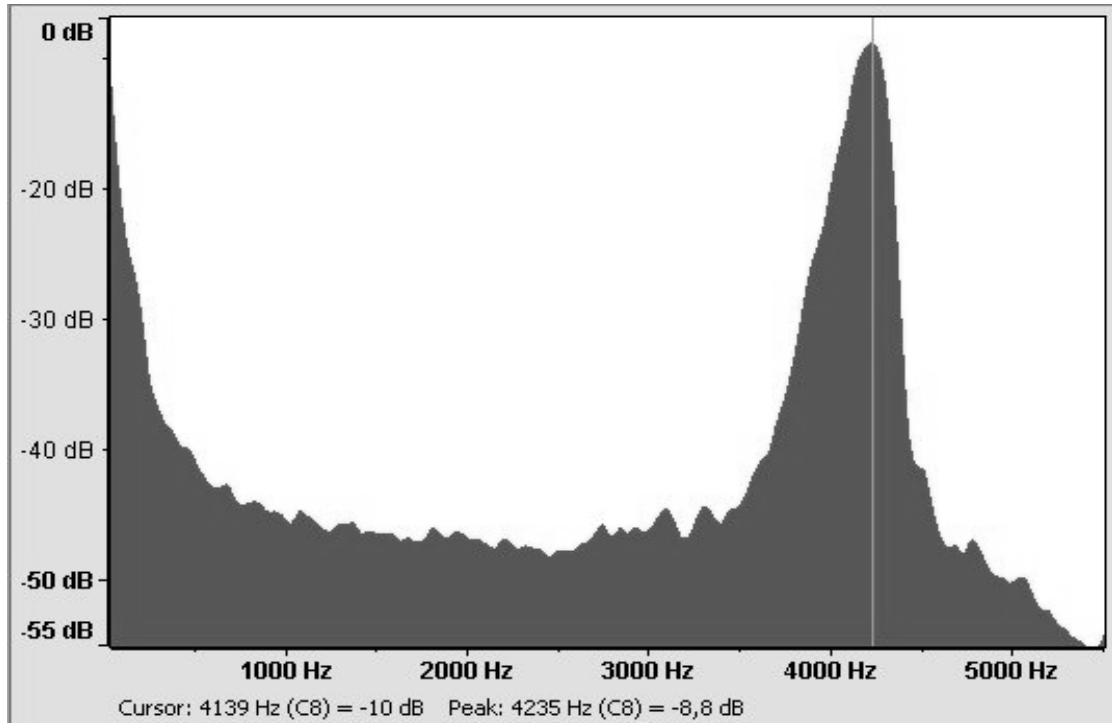


Şekil 3.24. Cırcır böceği ses kaydının genlik-zaman grafiği (Çetinkaya, 2010)



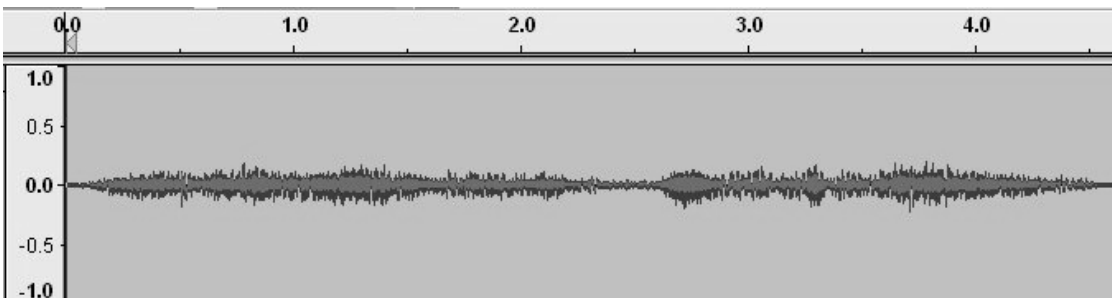
Şekil 3.25. Cırcır böceği genlik-zaman grafiğinin yakınlaştırılmış hali (Çetinkaya, 2010)

Şekil 3.25.'de cırcır böceğinin çıkardığı seslerin bir sinüs dalgasına benzediği görülebilir.

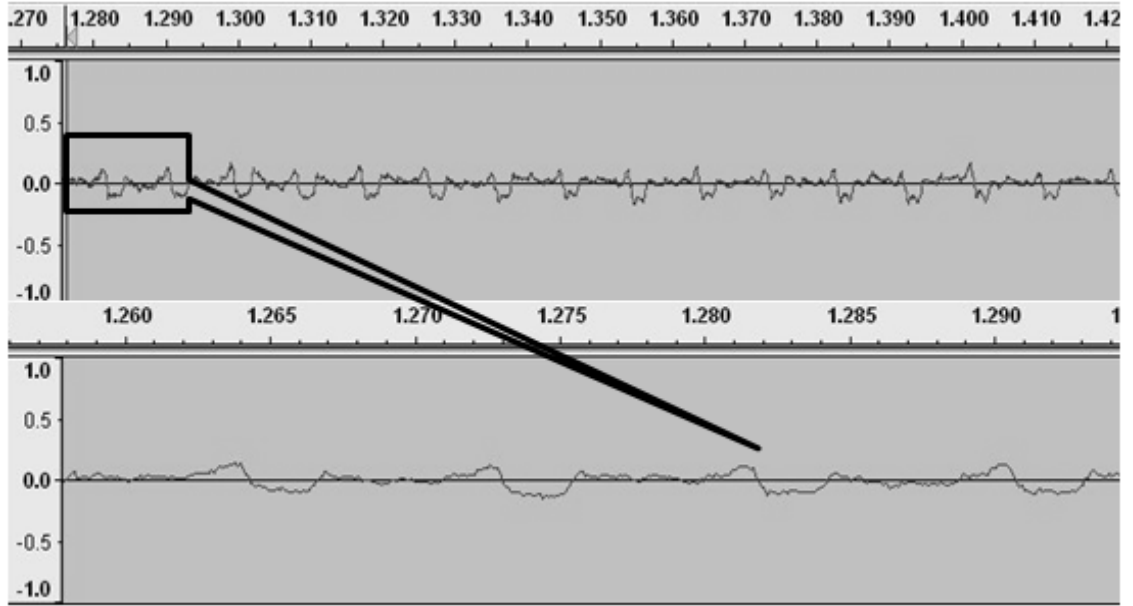


Şekil 3.26. Cırcır böceği ses kaydının Fourier analiz sonucu (Çetinkaya, 2010)

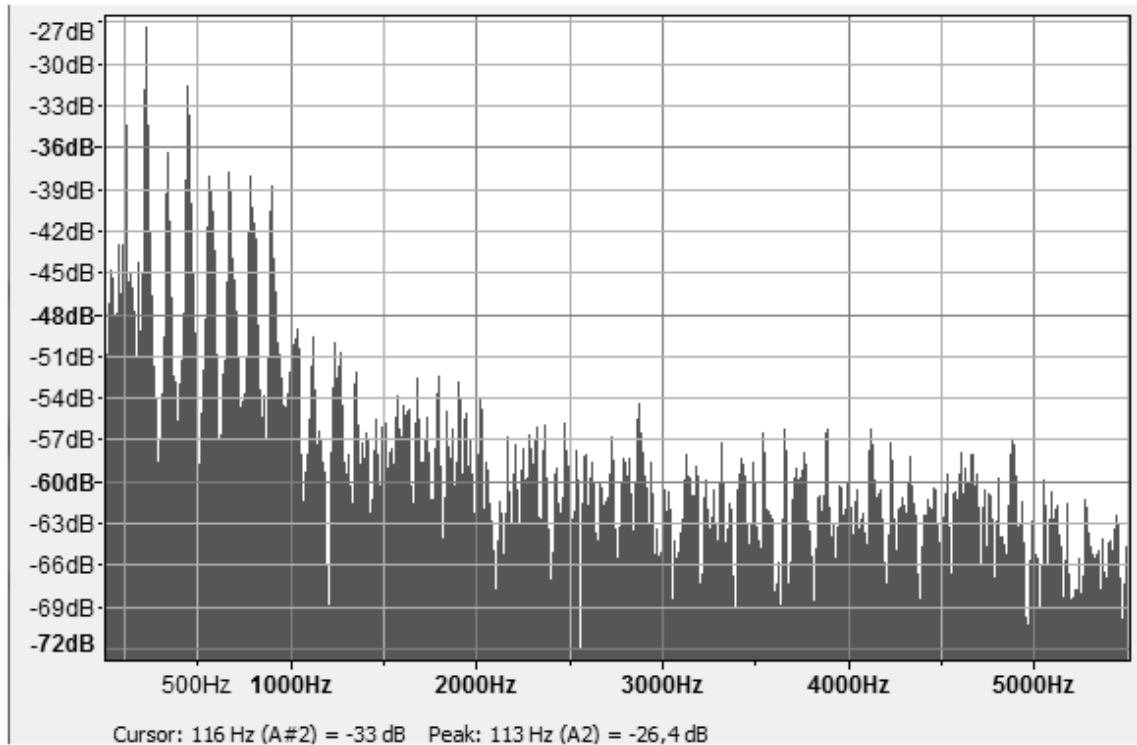
Kanatlarından ses çıkardığı belirtilen yaban arısının genlik-zaman grafiği ve Fourier analiz diyagramı aşağıda yer almaktadır.



Şekil 3.27. Yaban arısının ses kaydının genlik-zaman grafiği (Çetinkaya, 2010)



Şekil 3.28. Yaban arısı genlik-zaman grafiğinin yakınlaştırılmış hali (Çetinkaya, 2010)



Şekil 3.29. Yaban arısının ses kaydının Fourier analiz sonucu (Çetinkaya, 2010)

Çetinkaya (2010) tarafından yapılan bu tez çalışmasında; bazı böcek seslerinden Fourier analiziyle bilgiler elde edilerek, böceklerin çiftleşme davranışları, iletişimde kullandığı sesin frekans aralığı, kanat çırpma sayıları gibi fizyolojik özelliklerinin çeşitlilik gösterdiği belirtilmiş ve bu bilgilerin akustik zirai mücadelede kullanılabileceği sonucuna varılmıştır.

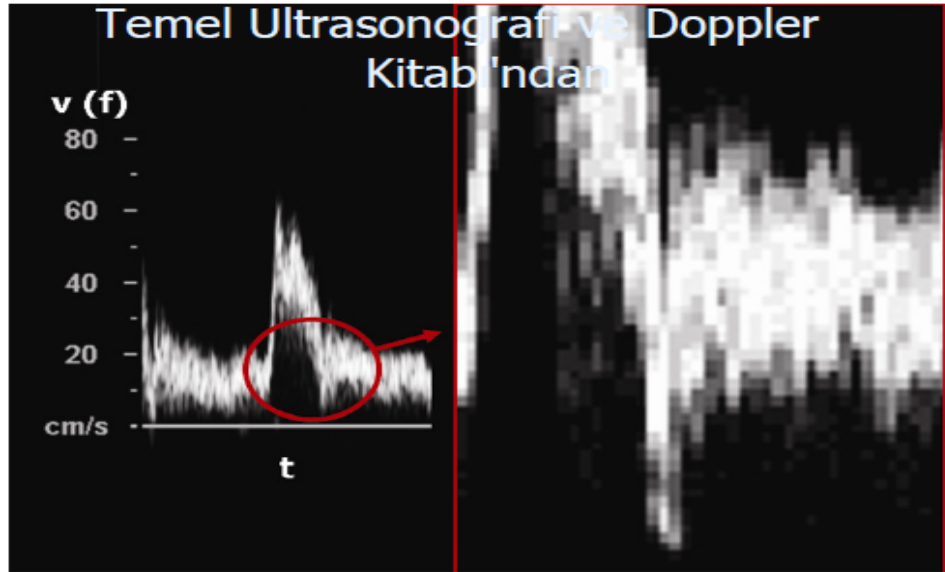
3.3.10. Tıbbi görüntüleme ve değerlendirmeler

Hızlı Fourier dönüşümü, periyodogram, spektrogram ve kısa süreli Fourier dönüşümü gibi yöntemler; temelde güç spektrumuna sahip olan periyodik işaretlerin bunları meydana getiren trigonometrik bileşenlerine ayrıştırılmasına dayanan Fourier yaklaşımıyla türetilmiştir. Periyodik olmayan, dolayısıyla sonlu enerjiye sahip sinyaller enerji spektrumuna sahiptirler. Ancak doğal ortamlardan ölçülen işaretler çoğunlukla durağan ve periyodik değildir. Bu yüzden Fourier yaklaşımına dayanan yöntemlerle yapılan analizlerde işaretler durağan kabul edildiği zaman dilimleri için pencerelenip periyodikmiş gibi değerlendirilerek güç spektrumları elde edilir. Denis Gabor, 1946 yılında pencereleme yöntemini kullanarak, işaretin küçük bir parçasını zaman tanım aralığında ele almış, işareti zaman ve frekansın fonksiyonu olarak iki boyutta ifade etmiştir. Bu dönüşüm yönteminde işaretin belirli bir kesiminin durağan olduğu kabul edilip bir pencereden geçirilerek yerel bir frekans parametresiyle Fourier analizi işlemi gerçekleştirilir. Kısa süreli Fourier dönüşümünde sinyal küçük segmentlere bölünür ve bu segmentlerde sinyalin durağan olduğu kabul edilir. Durağanlığın geçerli olduğu bu segmentlere pencere denilmektedir. Fourier analizinin lokalize edilmesi fikrine dayanan bu teknikte ilgilenilen yerde uygun bir pencere seçilerek dönüşüm işlemi gerçekleştirilir. Kısa süreli Fourier dönüşümü temel bir pencere fonksiyonundan, zaman alanında kaydırma ve frekans parametreleri olmak üzere iki ayrı şekilde türetilir. Pencere fonksiyonu $w(t)$ nin sonlu enerjiye sahip olması ve integralinin alınabilmesi gerekmektedir. Kısa süreli Fourier dönüşüm yönteminde zaman ekseninde bir τ noktasına $w(t)$ pencere fonksiyonu yerleştirilerek, pencerelenmiş fonksiyonun Fourier dönüşümü gerçekleştirilir. Daha sonra pencere kaydırılır ve tekrar Fourier dönüşümü alınarak işleme devam edilir. Bu yöntemin matematiksel ifadesi aşağıdaki denklemde ifade edilmiştir (Kıymık, Subaşı, Dizibüyük ve Özer, 2002).

$$STFT(w, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)w^*(t - \tau)e^{-j\omega t} dt = \langle g_{w, \tau}(t), f(t) \rangle$$

Kan içerisinde bulunan elemanlar her zaman aynı hızda hareket etmediklerinden değişik frekans kaymaları oluştururlar. Değişik hızlardaki hareket transdüserine kompleks bir sinyal olarak ulaşır. Bu kompleks sinyal “Fast Fourier Transform Analyzer” aygıtıyla işlenerek basit frekans elemanlarına ayrılır. “Analog Dijital Çevirici” ile de

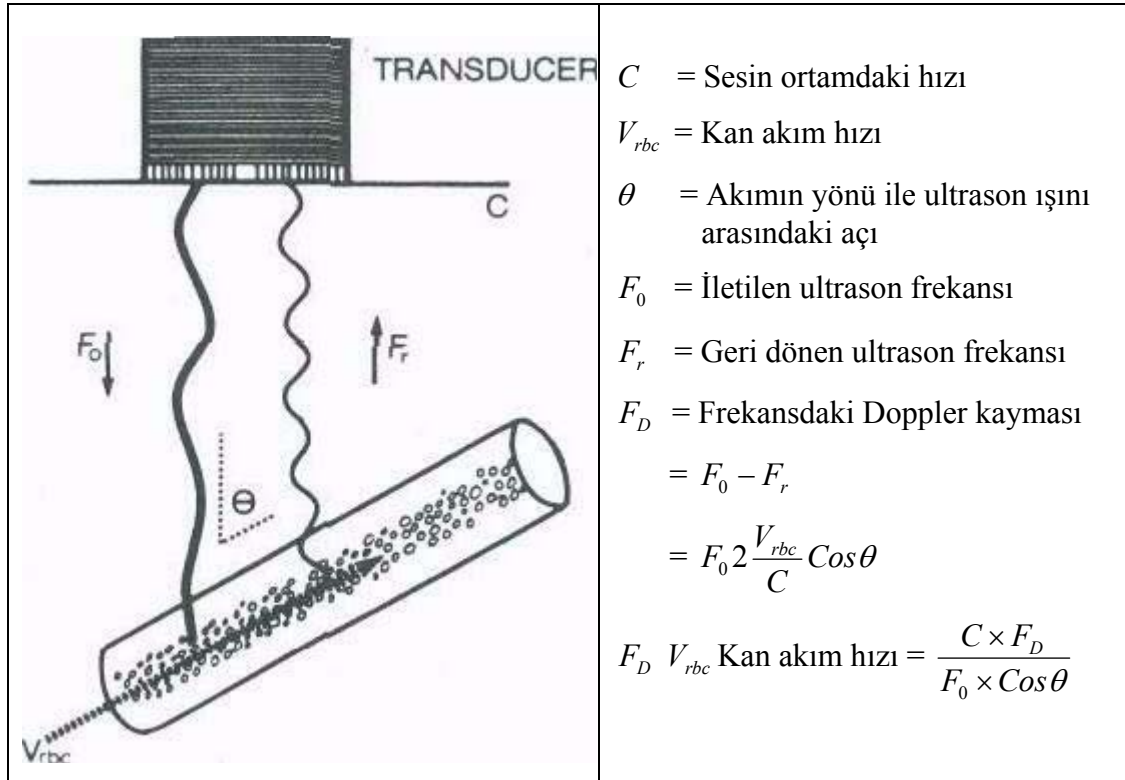
dijital formata dönüştürülür. Hız bilgisini içeren spektral analizi göstermek için değişik aralıklardaki hızlar aranır ve karelere depolanır. Sonuçta değişik hızdaki kareler biriktirilir ve zamana göre haritası çıkarılır. Sinyal segmentlerinin arka arkaya işlenmesiyle sürekli Doppler spektrumu oluşturulur. Seçilen bölgeden geri dönen ses dalgaları ile ortaya çıkan frekans farkı, monitörde gri skala görüntüsünün yanında hız/zaman (cm/sn) veya frekans/zaman (kHz/sn) grafiği şeklinde gerçek zamanlı olarak izlenebilir. Şekil 3.30.'da elde edilen frekans kaymalarının hızlı Fourier dönüşümü tekniğiyle zaman-frekans bilgisine dönüştürülmesi ve belirli "t" zamanında saptanan frekans miktarına göre piksellerle kodlanmasına ait görüntü oluşumu yer almaktadır. Sağda büyütülerek pikselleri seçilebilir hale getirilmiş görüntüde piksel gri tonlarının farklılık gösterdiği görülüyor. Beyaz alanlar en fazla frekans kaymasını, siyah alanlar o zaman aralığında hiç frekans kayması olmadığını gösteriyor. Ara gri tonları ise frekans kaymasının miktarına göre belirleniyor. (<http://www.mustafasecil.com>).



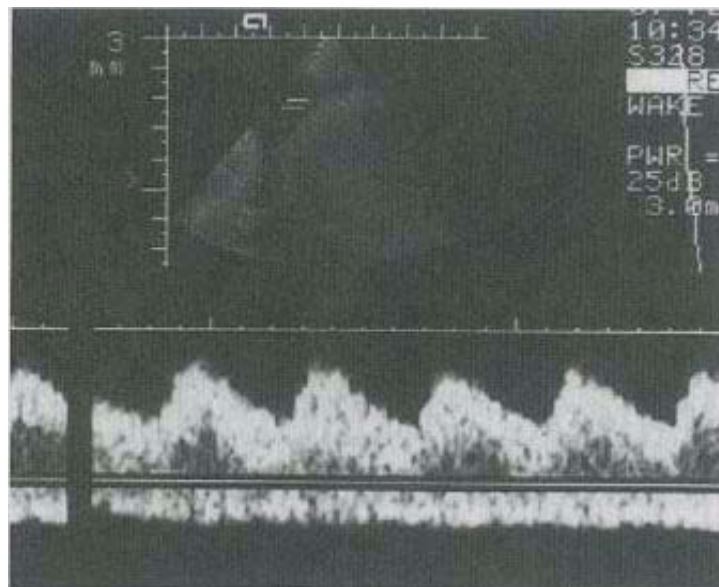
Şekil 3.30. Spektrumun oluşması (<http://www.mustafasecil.com>)

Ses ötesi Doppler; kan akış hızını, yönünü ve debisini incelemeye kullanılmaktadır. Doppler sistemlerinde, ultrasonik dönüştürücünün gönderdiği ultrasonik dalganın kandaki kırmızı kan hücrelerinden saçılması ve yansımından dolayı frekansta değişimler gözlenir (Latifoğlu ve Kara, 2007). Doppler etkisi, akustik ya da ultrason dalgasının frekansının değişmesidir. Bu da Şekil 3.31.'de gösterildiği gibi iletici ve alıcı kaynaklar arasındaki toplam yol uzunluğu değiştiğinde ortaya çıkar. Doppler

spektrumunu dikey eksenle alçaktan hızla yükseğe doğru sıralamak için kullanılan dijital analitik yöntem, hızlı Fourier dönüşümüdür. Bu işlem gerçek zamanda alınan sinyalin farklı hızlardaki parçalarını Şekil 3.32.'deki gibi kan akım hızı dalga formu olarak gösterir (Babür, 2006).



Şekil 3.31. Doppler etkisinin şematik çizimi (Babür, 2006)



Şekil 3.32. Kan akım hızı dalga formu (Babür, 2006)

Bayrakçı ve Barışçı (2008); çeşitli hastalıkların hızlı ve doğru bir şekilde teşhisinin günümüzde çok önemli olduğunu ve bu amaçla uzman hekimlere kararlarında yardımcı olacak, yapay zekâ içeren sistemlerin geliştirilmesinin büyük önem arz ettiğini belirtmişlerdir. Yaptıkları çalışmada 75 hastanın kalp mitral kapakçığından kaydedilen kardiyak Doppler işaretlerini bir ses kartı yardımıyla kişisel bilgisayara aktardıklarını ve her bir hastadan kaydedilen kardiyak Doppler işaretine hızlı Fourier dönüşümü analizi uygulayarak, böylece uzman hekimlere hastalık teşhisinde yardımcı olacak bir sistem geliştirildiğinden bahsetmişlerdir.

Bu çalışmada; Doppler tekniğinin özellikle vücuttaki kan hızının tespiti ve ölçülmesinde kullanıldığı belirtilmiş, kalp mitral kapakçığında meydana gelen daralmaların ve yetmezliğin kan akışını nasıl etkilediği incelenerek hastalardan elde edilen Doppler sinyallerine, hızlı Fourier dönüşümü uygulanmış ve bulunan değerler yapılan sınıflandırma sonrası aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.

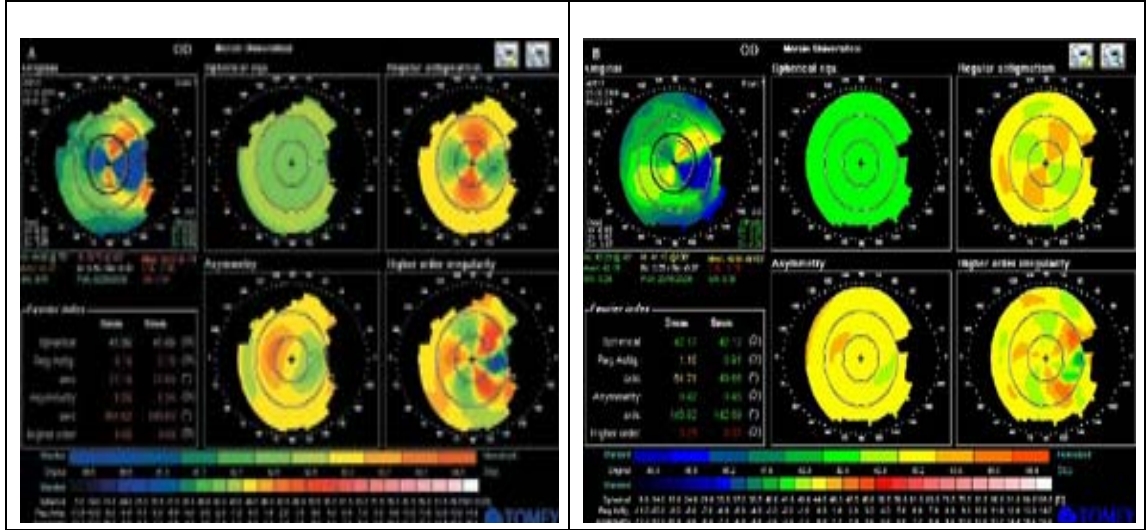
<i>Sınıflar</i>	<i>Doppler İşaretlerinin Sayısı</i>	<i>Doğru sınıflanan işaret sayısı</i>
<i>Mitral Darlık</i>	25	22
<i>Mitral Yetmezlik</i>	25	23
<i>Sağlıklı Mitral</i>	25	23

Şekil 3.33. Sınıflandırma sonuçları (Bayrakçı ve Barışçı, 2008)

Şekil 3.33. de; 25 mitral darlık hastasından 22 tanesinin, 25 mitral yetmezliği hastasından 23 tanesinin ve 25 sağlıklı işareten 23 tanesinin doğru olarak sınıflandırıldığı vurgulanan bu çalışmada, hastalardan elde edilen Doppler sinyallerine hızlı Fourier dönüşümü analiz yöntemi uygulanarak yapılan sınıflandırmanın uzman hekimlere hastalık teşhisinde yardımcı olacağı sonucuna varılmıştır.

Pterjyum (korneaya uzanan anormal doku) cerrahisinden sonra kornea topografisinde oluşan değişikliklerin Fourier analiziyle incelenmesi ve gözün optik kalitesinin değerlendirilmesi amacıyla Adıgüzel, Yeşilli, Sarı, Kervancı ve Öz (2008) tarafından yapılan çalışmada; Fourier analizinin videokeratografi verilerini

matematiksel olarak ayrıştırdığı belirtilmiş ve Fourier analizi sonucu edinilen grafikler aşağıda verilmiştir.



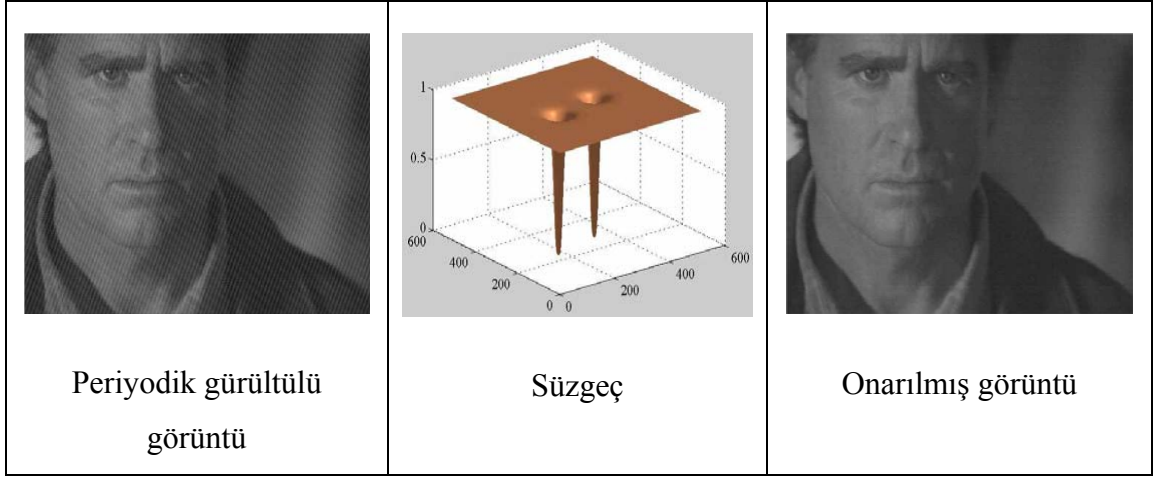
Şekil 3.34. Pterjiyumlu hastanın ameliyat öncesi ve sonrası göz korneasının Fourier analiz haritaları (Adıgüzel vd 2008)

Adıgüzel vd (2008) tarafından yapılan bu çalışmada; pterjiyum ameliyatında kornea topografisi verilerinin Fourier analiz değerlerinde anlamlı düzelme sağladığı vurgulanmıştır.

3.3.11. Video görüntülerindeki periyodik gürültülerin giderilmesi

Erol, Gürbüz ve Gangal (2006) video görüntülerindeki periyodik gürültülerin yok edilmesi üzerine yaptıkları çalışmada Fourier dönüşümlerinden faydalandıklarını belirterek aşağıda özetlenen açıklamalarda bulunmuşlardır.

Görüntüye bir motor veya elektromekanik ayardan elektriksel veya elektromagnetik girişim sonucu periyodik gürültüler karışabilmektedir. Periyodik gürültünün frekans alanındaki bileşenlerinin genlikleri çevresindeki frekans bileşenlerine göre belirgin bir büyüklük göstermektedir. Frekans eksenindeki tepeler belirlenerek görüntünün frekans genlik spektrumu hesaplanmaktadır. Ele alınan görüntü karesine uygulanan ayrık Fourier dönüşümü ve ayrık ters Fourier dönüşümü yardımıyla uzamsal alana geçilerek onarılmış görüntü elde edilir. Şekil 3.35.'de bir periyodik gürültünün onarılması gösterilmiştir.



Şekil 3.35. Periyodik gürültünün giderilmesi (Erol vd 2006)

Periyodik gürültülü görüntüler üzerinde yapılan çalışmalar sonucunda bu yöntemle periyodik gürültülerin çok iyi şekilde azaltıldığı ve yok edildiği gözlemlenmiştir (Erol vd 2006).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Periyodik fonksiyonların gerçek hayata uyarlanması Fourier serileriyle mümkün olmuştur. Fourier serileri, periyodik fonksiyonların trigonometrik fonksiyonlar cinsinden ifadesi anlamına gelmektedir. Bu düşünce, periyodik olmayan fonksiyonların sonsuz periyotlu periyodik bir fonksiyonmuş gibi algılanıp Fourier açılımlarının yapılabileceği fikrini doğurmuştur. Mühendislik uygulamaları açısından zaman boyutundaki bir sinyali frekans boyutuna aktarma iŐlemine Fourier dönüşümü denilmektedir. Fourier dönüşümünde Fourier serilerinin katsayılarının hesaplanması uzun matematiksel işlemler gerektirdiğinden, bilgisayar teknolojisindeki ilerlemelerle birlikte ayrıık ve hızlı Fourier dönüşümü algoritmaları geliştirilmiştir. Bilgisayar destekli algoritmaların geliŐtirilmesi, periyodik fonksiyonların Fourier analizi aracılığıyla mühendislik alanlarındaki uygulanabilirliğini artırmıŐ ve mühendisleri periyodik fonksiyonlar üzerinde daha çok çalışmaya yönlendirmiŐtir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Genel mantık kurallarından hareketle sayısal ilişkileri irdeleyip genellemeler yoluyla insan zekâsını işlemeyi amaçlayan bilim dalı matematik olarak tanımlanabilir. İnsan varlığının yarattığı en köklü bilimlerden birisi olan matematik, beşeri ihtiyaçları karşılamaya yönelik hassasiyeti sayesinde değerine değer katan bir ivmeyle gelişimini sürdürmektedir.

Belli faaliyet ve işlemler sonucu değer oluşturma aktiviteleri üretim olarak tanımlandığında, emek sonucu ortaya konulan maddi veya fikri varlıklar “ürün” olarak adlandırılır. Gerekli materyali bünyesine alıp, ihtiyaca yarayan çıktılara dönüştüren bütün üretim sistemlerinde ürünün kalitesi; sistemin girdisini oluşturan materyalin ihtiyaca uygunluğu ile doğrudan orantılıdır. Matematiksel üretim, çağlar boyunca, sayısal verileri işleyen sistemlerin temel girdisi olmuştur.

Tez konumuzla ilgisi bakımından sinyaller ve sistemler mühendislik bilimlerinin temel konuları arasında yer almaktadır. Sinyallerin işlenebilmesi için sistemlere ihtiyaç duyulur. Sistemler, sinyalleri sayısal verilere dönüştürerek insan aklının kavrayabileceği boyuta taşırlar. Sinyal taşıma araçlarından birisi de periyodik fonksiyonları referans alan Fourier analizleridir.

Periyodik fonksiyonların farklı bakış açılarıyla ele alınıp, yeni matematiksel ürünlerin ortaya konulabilmesi için; matematiksel üretimin girdileriyle şekillenen uygulama ve ihtiyaçlardan haberdar matematikçilere ihtiyaç vardır. İhtiyacın belirlenmesiyle farkına varılan problemler çözüm için alınan mesafenin yarısına eşittir.

Belli bir alandaki çalışmaları teşvik edebilmenin belki de en kolay yolu ihtiyacı ve problemi iyi şekilde tanımlayabilmektir. Bilgi edinimiyle mümkün olan tanımlama faaliyeti zihinsel açıdan uyarılmayı gerektirir.

Yükseköğretim sistemlerinin temel amaçlarından birisi de zihinsel uyanışı gerçekleştirmek suretiyle öğrencilere sentezleme kabiliyeti kazandırmaktır. Tahsil ettiği ilmin uygulama ve uyarlamalarını iyi bilen matematikçiler yeni matematiksel fikriyat üretmeye daha yakın mesafede dururlar. İşte bu sebeplerle yapılan çalışmamızın

periyodik fonksiyonlara yeni matematiksel bakış açıları kazandıracığı inancını taşımaktayız.

KAYNAKLAR

- Adıgüzel, U., Yeşilli, M., Sarı, A., Kervancı, T. ve Öz, Ö. (2008). Pterijyum ameliyatının korneal düzenli ve düzensiz astigmatizmaya etkisi: Fourier analizi ile inceleme. *T. Oft. Gaz.*, 38 (1), 4–8.
- Akar, M. ve Çankaya, İ. (13–15 Mayıs 2009). *Evirici ile sürülen asenkron motorlarda rotor çubuğu kırık arızasının tespiti*. 5. Uluslararası İleri Teknolojiler Sempozyumunda sunuldu, Karabük.
- Akpınar, E. (2007). Kompanzasyon ve harmonik filtreleme-2. *Elektrik Mühendisleri Odası İzmir Şubesi Bülteni*, 20 (211), 21–23.
- Altıntaş, A. (2006). Tanımlanmış veya ölçülmüş dalga şekilleri için bir harmonik analizörü. *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 10 (2), 6–15.
- Aydın, S. (1999). *Analize giriş- cilt 1*. (7. Baskı). İstanbul: Beta Yayınları.
- Babür, S. (2006). *Normal gebelerde renkli doppler ultrasonografi bulguları; kendi popülasyonumuzdaki normal doppler değerlerinin saptanması*. Uzmanlık tezi, Sağlık Bakanlığı İstanbul Haydarpaşa Numune Eğitim ve Araştırma Hastanesi Radyoloji Kliniği.
- Balcı, M. (1997). *Matematik analiz 2*. (5. Baskı). Ankara: Balcı Yayınları.
- Balcı, M. (1999). *Matematik analiz 1*. (6. Baskı). Ankara: Balcı Yayınları.
- Başkan, T. (2005). *Kompleks fonksiyonlar teorisi*. (5. Baskı). Ankara: Nobel Basımevi.
- Bayrakçı, N. ve Barışçı, N. (26–30 Kasım 2008). *Mitral kapak doppler işaretlerinin bulanık kümeleme ile sınıflandırılması*. Eleco'2008 Elektrik-Elektronik ve Bilgisayar Mühendisliği Sempozyumu ve Fuarında sunuldu, Bursa.
- Bayram, M. (2009). *Diferansiyel denklemler*. İstanbul: Birsen Yayınevi.
- Berker, R. (1993). *Analiz dersleri*. İstanbul: İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Basım Atölyesi.
- Bora, U. (2002). Bilim ve sanatın kesiştiği temel bir nokta: matematik ve müzik ilişkisi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 15 (1), 53–68.
- Bracevell, R. N. (1991). Fourier dönüşümü. (Çev. A. Butlan). *Elektrik Mühendisliği*, 4 (380), 109–118.
- Chapra, S. C. ve Canale, R. P. (2004). *Yazılım ve programlama uygulamalarıyla mühendisler için sayısal yöntemler*. (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin). İstanbul: Literatür Yayıncılık.
- Çetinkaya, A. (2010). *Bazı böcek türlerinin ses analizleri ve zirai mücadelede kullanılabilirliğinin araştırılması*. Yüksek lisans tezi, Adana Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Çoğun, C., Kocabaş, B. ve Özgedik, A. (2004). Elektro erozyon ile işlemede (EEİ) işparçası yüzey pürüzlülük profilinin deneysel ve teorik olarak incelenmesi. *Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 19 (1), 98–106.
- Dönmez, A. (1996). *Fourier analizi*. Erzurum: Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları.
- Dutta, M. and Debnath, L. (1965). *Elements of the theory of elliptic and associated functions with applications*. India: World Pres.
- Dündar, S. (2000). Fourier dönüşümü ve karakteristik fonksiyon. *Dokuz Eylül Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, 15 (2), 115–126

- Ekiz, A. ve Tümay, M. (18–21 Eylül 2003). *Fabrikalarda meydana gelen harmoniklerin matlab/simulink kullanılarak modellenmesi*. Elektrik-Elektronik-Bilgisayar Mühendisliği 10. Ulusal Kongresi ve Fuarında sunuldu, İstanbul.
- Erdoğan, H., Güral, E., Akpınar, B. ve Ata, E. (11-15 Mayıs 2009). *Asma köprülerinin titreşimlerinin GPS ile izlenmesi*. 12. Türkiye Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayında sunuldu, Ankara.
- Erol, A., Gürbüz, M. E. ve Gangal, A. (6-8 Eylül 2006). *Video görüntülerindeki periyodik gürültülerin yok edilmesi*. URSI-Türkiye'2006 3. Bilimsel Kongresi ve 4. Ulusal Genel Kurul Toplantısında sunuldu, Ankara.
- Görmüş, K. S., Mekik, Ç. ve Kutoğlu, Ş. H. (2006). Gerçek zamanlı kinematik GPS ile ölçülen köprü salınımlarının zaman serisi analizi. *Jeodezi, Jeoinformasyon ve Arazi Yönetimi Dergisi*, 2 (95), 25–35.
- Halilov, H., Hasanoğlu, A. ve Can, M. (2002). *Yüksek matematik 1- tek değişkenli fonksiyonlar analizi*. (2. Baskı). İstanbul: Literatür Yayıncılık.
- Işık, A. (1987). *Eisenstein serileri ve trigonometrik fonksiyonlara tatbiki*. Yüksek lisans tezi, Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Işık, A. (2002). *Lineer cebir*. Erzurum: Atatürk Üniversitesi Yayınları.
- Kadıoğlu, E. ve Kamali, M. (2003). *Genel matematik*. (3. Baskı). Erzurum: Bakanlar Matbaacılık.
- Karadeniz, A. A. (2000). *Yüksek matematik - cilt 2*. (8. Baskı). İstanbul: Çağlayan Kitabevi.
- Karaoğlu, B. (2007). *Fizik ve mühendislikte matematik yöntemler*. (5. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Kesler, M. ve Sunan, M. (26–30 Kasım 2008). *Düşük maliyetli DSP uygulama geliştirme kartının tasarımı ve güç sistemlerinde harmonik analizin gerçekleştirilmesi*. Eleco'2008 Elektrik Elektronik ve Bilgisayar Mühendisliği Sempozyumu ve Fuarında sunuldu, Bursa.
- Kıymık, M.K., Subaşı A., Dizibüyük A. ve Özer, M.S. (2002). Darbeli doppler laminar kan akış sinyali simülasyonuna STFT ve AR spektral analizlerinin uygulanması. *Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen ve Mühendislik Dergisi*, 5(2), 14–27.
- Köse, R. K. (2004). Makina arızalarının belirlenmesinde titreşim analizi. *Mühendis ve Makina Dergisi*, 45 (538), 24–32.
- Kreyszig, E. (1967). *Advanced Engineering Mathematics*. (2. Edition). New York: J. Wiley.
- Latifoğlu, F. ve Kara, S. (14–18 Kasım 2007). *Myoma uteruslu bayanlara ait uterus atardamar doppler sinyallerinden öznitelik çıkarma*. Elektrik-Elektronik Bilgisayar Biyomedikal Mühendisliği 12. Ulusal Kongresi ve Fuarında sunuldu, Eskişehir.
- Nasibov, F. H. ve Kaçar, A. (2008). *Analize giriş fonksiyonlar ve fonksiyonların sınıflandırılması*. Ankara: Palme Yayıncılık.
- Ocak, R. (2005). *Kompleks analiz*. (4. Baskı). Erzurum: Atatürk Üniversitesi Yayınları.
- Önem, C. (1998). *Fizikte matematik metodlar*. İstanbul: Birsen Yayınevi.
- Pappas, T. (2003). *Yaşayan matematik*. (Çev. Y. Silier). İstanbul: Doruk Yayıncılık.
- Spiegel, M. R. (1991). *Theory and problems of Fourier analysis with applications to boundary value problems*. (16. Edition). USA: Schaums's Outline Series.

- Şafak, E. (16–20 Ekim 2007). *Yapı titreşimlerinin izlenmesi: nedir, neden yapılır, nasıl yapılır, ve ne elde edilir?*. Altıncı Ulusal Deprem Mühendisliği Konferansında sunuldu, İstanbul.
- Tunçalp, K., Kakilli, A. ve Sucu, M. (24–27 Eylül 2003). *Bir alçak gerilim elektrik enerji tesisinde harmonik ölçüm sonuçlarının matlab'de simülasyonu ve pasif filtre uygulaması*. Türkiye 9. Enerji Kongresinde sunuldu, İstanbul.
- Yarasa, R. (1976). *Fourier analizi*. İstanbul: İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi Yayınları.
- Yıldız, İ. (1998). *Adi diferansiyel denklemler*. Erzurum: Kariyer Matbaacılık.
- Yurtçu, Ş. ve İçağa, Y. (2005). Akarçay havzası yeraltı suyu periyodik davranışının modellenmesi. *Yapı Teknolojileri Elektronik Dergisi*, (2), 21–28.
<http://www.akademi.itu.edu.tr/ayhanb/DosyaGetir/35794/Fourier%20Serileri.pdf>
 (14.11.2010).
- http://www.mustafasecil.com/ornek/ornek_bolum_1.pdf (17.11.2010).
- <http://www.sozluku.com/Meteoroloji%20Sözlüğü/PERİYODOGRAM%20ANALİZ-anlami.html> (14.11.2010).
- <http://www.tdk.gov.tr/TR/Genel/SozBul.aspx?F6E10F8892433CFFAAF6AA849816B2EF4376734BED947CDE&Kelime=m%c3%bczik> (14.11.2010).
- http://www2.aku.edu.tr/~icaga//dersler/veri_analizi/verianalizi_7.pdf (14.11.2010).

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Erzurum'un Pasinler ilçesinde doğdu. İlköğretimi; Pasinler, Erzurum ve Karabük'te, ortaöğretimi ise Zonguldak ve Bartın'da tamamladı. Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde 2004 yılında başlayan yüksek öğrenimini 2008 yılında bölüm üçüncüsü olarak tamamladı. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans öğrenimine başladı.